STETIGE BILDER VON MANNIGFALTIGKEITEN UND IHRE APPROXIMATIONSTHEORETISCHE BEHANDLUNG

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Dipl. Math. Wolfgang Warth
aus Stuttgart

Göttingen 1975

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534917_0021

STETIGE BILDER VON MANNIGFALTIGKEITEN UND IHRE APPROXIMATIONSTHEORETISCHE BEHANDLUNG

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Dipl. Math. Wolfgang Warth
aus Stuttgart

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent:Prof.Dr.B.Brosowski
Koreferent:Prof.Dr.J.Werner
Tag der mündlichen Prüfung:29.4.1975

Inhalt

Einleitung

§ 1 Grundlagen 1

§ 2 Approximation in normierten Räumen 3

§ 3 Tschebyschev-Approximation 15

§ 4 Tschebyschev-Approximation mit Interpolation 45

§ 5 L_1-Approximation 61

Literatur

Einleitung

Die Theorie der nichtlinearen Approximation mit parameterabhängigen Approximationsfamilien wurde in den letzten Jahren sehr eingehend untersucht.Bisher wurde der Fall behandelt,wo die Parametermenge eine offene Teilmenge eines normierten Raumes ist und glatte Abhängigkeit der Approximationsfamilie von den Parametern vorliegt.

Der Nachteil dieser Theorie ist,daß sie nicht mehr anwendbar ist,sobald Nebenbedingungen an die Parameter gestellt werden.Daher wurde mit anderen Methoden versucht,in jenem Fall zu Ergebnissen zu gelangen.Es wurde aber noch keine einheitliche Theorie zur Behandlung von Problemen mit Nebenbedingungen vorgelegt,sondern man versuchte auf mehr oder weniger direktem Weg die Ergebnisse aus der Theorie ohne Nebenbedingungen zu übertragen.

In vielen Fällen ist erkennbar,daß eine analoge Behandlung von Approximationsproblemen mit Nebenbedingungen zur Behandlung solcher ohne Nebenbedingungen möglich sein muß.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Fall betrachtet, daß die Parametermenge eine Mannigfaltigkeit ist.Diese Problemstellung erfaßt nun auch den Fall,daß Nebenbedingungen an das Approximationsproblem in Gleichungsform auftreten.Ungleichungen könnte man erfassen,wenn man

Mannigfaltigkeiten mit Rand betrachtet.
Da die im allgemeinen nichtlinearen Approximationsprobleme auf lineare Probleme zurückgeführt werden,ist es notwendig,eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zu betrachten und differenzierbare Abhängigkeit der Approximationsfamilie von den Parametern zu fordern.
Es stellt sich folgende Aufgabe:Es sei B ein normierter Raum,n eine natürliche Zahl,M eine n-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit und $F:M\to B$ eine C^1-Abbildung.Das Approximationsproblem sei bezüglich der Menge $\tilde{\mathcal{F}}=F[M]$ gestellt.Damit werden auch die Spezialfälle der endlichdimensionalen linearen,rationalen und exponentiellen Approximation erfaßt.
In dem Fall,wo M offene Teilmenge eines normierten Raumes X endlicher Dimension ist,dieser Fall ist in der vorliegenden Problemstellung enthalten,kann man einem Element $v_o\in\tilde{\mathcal{F}}$ einen linearen Teilraum $T^*(a)=F'(a)[X]$ zuordnen;hierbei ist $a\in M$ mit $F(a)=v_o$.Wenn nun v_o beste Approximation an ein Element $f\in B$ ist,so ist Θ beste Approximation an $f-v_o$,stellt man ein neues,lineares Approximationsproblem bezüglich $T^*(a)$.Dieses notwendige Kriterium wird bei Brosowski[4,1969],ohne die Einschränkung der endlichen Dimension von X,bewiesen.Es bildet den Ausgangspunkt für Eindeutigkeitsuntersuchungen.Daß das Konzept auch in einem allgemeineren Rahmen anwendbar ist, zeigt sich in der Arbeit von Gislason und Loeb[1972].

Zunächst wird dieses notwendige Kriterium auf das vorliegende,allgemeinere Problem übertragen.Aus dem Beweis ist zu ersehen,daß man hier die endliche Dimension von M nicht benötigt.In einem Beispiel wird der Zusammenhang dieses Kriteriums mit Ergebnissen aus der Optimierungstheorie hergestellt.

Anschließend betrachten wir die Eindeutigkeitsfrage der besten Approximation.Wir nennen die Menge $\mathcal{F}$ eine Tschebyscheff-Menge (T-Menge),wenn jedes $f \in B$ höchstens eine beste Approximation besitzt.

Als erstes Problem betrachten wir die Tschebyscheff-Approximation stetiger Funktionen auf einem kompakten, topologischen Raum T.

Wir nennen ein Paar (V_1,V_2) von disjunkten,abgeschlossenen Teilmengen V_1,V_2 von T ein V-System bezüglich $v \in \mathcal{F}$, wenn $V_1 \cup V_2 \neq \emptyset$ ist und es ein $\tilde{v} \in \mathcal{F}$ gibt,so daß

$$V_1 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t)-v(t) > o \} \quad V_2 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t)-v(t) < o \}$$

gilt.Die Abbildung F erfüllt dann die Vorzeichenbedingung,wenn zu jedem $v \in \mathcal{F}$ und jedem V-System (V_1,V_2) bezüglich v und zu jedem $a \in M$ mit $F(a)=v$ ein $h \in T^*(a)$ existiert, so daß $h(t) > o$ für alle $t \in V_1$ und $h(t) < o$ für alle $t \in V_2$ gilt.Ein r-dimensionaler linearer Teilraum H von C(T), $r \in \mathbb{N}$, heißt ein Haarscher Raum,falls jedes $v \in H$ höchstens r-1 Nullstellen besitzt.F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung,falls die Tangentialräume $T^*(a)$, $a \in M$ Haarsche Räume sind.F erfüllt die globale Haarsche Bedingung,wenn jede

Differenz F(b)-F(a),mit a,b∈M und F(a)≠F(b),höchstens $\dim \overset{*}{T}(a)-1$ Nullstellen besitzt.

Unter der Voraussetzung,daß F die Vorzeichenbedingung erfüllt,erhalten wir die folgenden Implikationen:

F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung $\Rightarrow \mathcal{F}$ ist eine T-Menge $\Rightarrow$ F erfüllt die globale Haarsche Bedingung.

In Spezialfällen sind solche Implikationen bekannt, siehe Rice[1,1964],Meinardus/Schwedt[1964],Brosowski [2,1967;3,1968],Collatz/Krabs[1973].

Es stellt sich die Frage,wann diese Bedingungen äquivalent sind.Dies gilt zum Beispiel im Fall der rationalen Approximation,aber auch im Fall der linearen Approximation mit linearen Nebenbedingungen(Brosowski [1,1965]).Brosowski[2,1967] hat die Frage unter einer stärkeren Voraussetzung als die Vorzeichenbedingung untersucht und die Äquivalenz der Bedingungen behauptet.Doch im Beweis der Implikation " $\mathcal{F}$ ist T-Menge $\Rightarrow$ F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung" tritt eine Lücke auf,die auch hier nicht geschlossen werden konnte.Dolganov[1972] versuchte diese Lücke zu schließen, jedoch in seinem Beweis befindet sich ein Fehler.

Wir führen hier den Begriff der Regularität der Abbildung F ein;F ist dann regulär,wenn die Räume $\overset{*}{T}(a)$ maximale Dimension haben.Nun können wir unter dieser Voraussetzung die Äquivalenz nachweisen.Lineare Approximationsfamilien sind regulär.Vermutlich ist diese Forde-

aber zu stark.Wir werden sehen,daß in dem Fall T=[o,1] die Familie $\mathcal{F}$ eine im Sinn von Motzkin,Tornheim und Rice lokal unisolvente Familie ist,wenn F regulär ist und die globale Haarsche Bedingung erfüllt.Hier besteht eventuell die Möglichkeit,das Beweiskonzept auf allgemeinere,varisolvente Familien zu übertragen.

Im Fall,wo T ein kompaktes Intervall erhalten wir den Satz,daß die lokale und globale Haarsche Bedingung genau dann erfüllt ist,wenn die Approximationsfamilie die Vorzeichenbedingung erfüllt und eine T-Menge ist;dies gilt unter der Voraussetzung der Regularität.
Abschließend gehen wir in diesem Abschnitt auf die Möglichkeit ein,die Haarsche Bedingung zu verallgemeinern. Im allgemeinen liegt der Fall vor,daß es zu einem $v_\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}$ mehrere Parametrisierungen $a \in M$ gibt,deren Tangentialräume unterschiedliche Dimension haben.Diese Zahlen gehen aber in die Definition der Haarschen Bedingung ein. Es ist wünschenswert,diese Definition allein von v_o abhängig zu machen.Ergebnisse hierzu wurden schon von Barrar und Loeb [2,197o] angegeben;dort unter Benutzung der Rice'schen Theorie der varisolventen Funktionensysteme.Also konnten dort auch nur Ergebnisse für ein Intervall erarbeitet werden.Wir wählen hier einen anderen Zugang und können uns von dieser Voraussetzung befreien. Ebenso erhalten wir sofort auch Ergebnisse für allgemei-

nere Parametermengen;Barrar und Loeb betrachteten nur den Fall offener Parametermengen.

Im folgenden Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Frage,wie sich das Approximationsproblem stellt,wenn man zusätzliche Nebenbedingungen,genauer Interpolationsforderungen,an die Approximationsfamilie stellt. Wir sind bemüht,eine analoge Theorie wie im vorhergehenden Abschnitt für die hier wichtigen relativen T-Mengen aufzubauen.Dabei nennen wir die Approximationsfamilie eine relative T-Menge,wenn jede Funktion,die der Interpolationsforderung genügt,höchstens eine beste Approximation besitzt.

Daß zumindest im linearen Fall eine analoge Theorie für die Tschebyschev-Approximation mit Interpolationsbedingungen zur klassischen Tschebyschev-Approximation aufzubauen möglich ist,hat Deutsch [1968] gezeigt.Diese Analogie setzt sich auch zum Teil im nichtlinearen Fall fort.Wir erhalten ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium dafür,daß die Approximationsfamilie eine relative T-Menge ist.Als Spezialfall erhalten wir Ergebnisse für die rationale Approximation mit Interpolation, die neu sind.Das bekannte Kriterium im linearen Fall,daß die lokale Haarsche Bedingung für das Problem ohne Nebenbedingungen impliziert,daß für die Approximation mit der Interpolationsforderung eine relative T-Menge vorliegt,

ist in unserem Ergebnis enthalten.
Es treten jedoch auch Probleme der Einpassung der Fragestellung in unsrere allgemeine Problemstellung auf,denn die Parametermenge,die die Approximationsfunktionen beschreibt,welche der Interpolationsforderung genügen,ist nicht immer eine glatte Mannigfaltigkeit.Es deutet sich hier an,daß das Problem eventuell in einem noch weiteren Rahmen behandelt werden muß.Wir geben aber eine Bedingung an,unter der alle Überlegungen aus den vorhergehenden Abschnitten anwendbar sind.
Im letzten Abschnitt befassen wir uns mit der L_1-Approximation stetiger Funktionen.Wir führen hier den Begriff der L_1-Signatur ein und erhalten einen Charakterisierngssatz für T-Mengen,der einem Satz von Brosowski [3,1968] aus der Tschebyschev-Approximation vollständig entspricht. Diesen Satz verwenden wir,um ein allgemeines,hinreichendes Kriterium dafür abzuleiten,daß eine T-Menge vorliegt. Dieser Satz verallgemeinert den bekannten Satz von Jackson auf den nichtlinearen Fall.
Unsere Überlegungen beziehen sich alle auf den Fall,daß glatte Abhängigkeit der Funktionen von ihren Parametern voröiegt.Ist dies nicht der Fall,so steht bislang nur die Rice'sche Theorie der varisolventen Funktionensysteme zur Verfügung.Daher ist man zunächst sofort auf die Approximation auf einem Intervall beschränkt.Es liegen

hier aber auch noch offene Probleme vor.Einen Überblick gibt die Arbeit von Ling und Tornga[1974].Resultate aus dieser Theorie,die mit unsreren Fragestellungen zusammenhängen,findet man bei Rice[2,1969] und Barrar/Loeb [1,1968].

§ 1 Grundlagen

Es sei B ein normierter Raum und B' der stetige Dualraum. Ferner sei $S_{B'}$ die Einheitskugel in B' und die Menge ihrer Extremalpunkte werde mit $ext(S_{B'})$ bezeichnet. Für jedes $f \in B$ sei

$$\Sigma_f = \{ x' \in B' : \|x'\| \leq 1 \quad , \quad x'(f) = \|f\| \}$$

und $\mathcal{E}_f = \Sigma_f \cap ext(S_{B'})$.

Es sei V eine Teilmenge von B. Die Elemente aus B sollen durch Elemente aus V approximiert werden, d.h. man sucht zu $f \in B$ ein $v_o \in V$ mit der Eigenschaft

$$\|f - v_o\| = \inf \{ \|f - v\| : v \in V \} .$$

Läßt sich zu jedem $f \in B$ ein solches v_o finden, so heißt V proximinal.

Jedem $f \in B$ wird eine Abbildung $\lambda_f : V \to \mathbb{R}$ durch

$$\lambda_f(v) = \|f - v\|$$

zugeordnet. Ist $v_o \in V$ ein Punkt, in dem λ_f ein (lokales) Minimum annimmt, so heißt v_o eine (lokal) beste Approximation an f. Ist $v_o \in V$ eine lokal beste Approximation an f, und existiert eine Umgebung von v, so daß f keine weitere lokal beste Approximation dort besitzt, so heißt v_o eine strikt lokal beste Approximation an f.

Die Menge der besten, lokal besten und strikt lokal besten Approximationen an eine $f \in B$ wird mit $P[f]$, $P^o[f]$, $P^{oo}[f]$ bezeichnet.

Die grundlegende Beziehung in der Approximationstheorie ist das Kolmogoroff-Kriterium:

Gilt für $f \in B$ und $v_o \in V$ eine der äquivalenten Bedingungen

(i) $\inf \{ x'(v-v_o) : x' \in \Sigma_{f-v_o} \} \leq o$ für alle $v \in V$

(ii) $\inf \{ x'(v-v_o) : x' \in \mathcal{E}_{f-v_o} \} \leq o$ für alle $v \in V$

dann ist v_o beste Approximation an f (Brosowski [4,1969]).
Die Umkehrung dieses Resultats ist für α -Sonnen richtig.
Dabei heißt V eine α -Sonne, wenn folgende Implikation richtig ist:
Ist $f \in B$ und $v_o \in P[f]$, so gilt $v_o \in P[v_o + \lambda(f-v_o)]$ für alle $\lambda > o$.
Der Begriff der α -Sonne und der Beweis der Umkehrbarkeit des Kolmogoroff-Kriteriums stammt von Brosowski [4,1968].

§ 2 Approximation in normierten Räumen

Wir betrachten das folgende nichtlineare Approximationsproblem:

Es sei B ein normierter Raum, n eine natürliche Zahl, M eine n-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit und $F:M\to B$ eine C^1-Abbildung. Wir wollen die Elemente aus B durch Elemente aus $\mathcal{F} = F[M]$ approximieren.

Ist $v\in\mathcal{F}$ und $a\in M$ mit $F(a)=v$, so heißt a eine Parametrisierung für v. Mit einer Parametrisierung a für v kann v ein Tangentialraum $T^*(a)$, das ist ein endlichdimensionaler Teilraum von B, zugeordnet werden. Zu $a\in M$ bestimme man eine Koordinatenumgebung (U,ϕ) von a. Dann ist durch $F_\phi = F\circ\phi^{-1}$ eine C^1-Abbildung von $\phi[U]$ nach B gegeben, und man definiert

$$T^*(a) = F'_\phi(\phi(a))[\mathbb{R}^n] \ .$$

Aus den, an die Koordinatenumgebungen geknüpften Bedingungen, folgt sofort, daß diese Definition von der speziellen Auswahl der Koordinatenumgebung unabhängig ist.

Wir nennen ein $v_o\in\mathcal{F}$ eine Tangentialapproximation an $f\in B$, wenn eine Parametrisierung a für v_o existiert, so daß Θ eine beste Approximation an $f-v_o$ ist, wenn man das Approximationsproblem bezüglich $T^*(a)$ stellt, d.h. wenn

$$\| f-v_o\| \leq \| f-v_o-h \|$$

für alle $h\in T^*(a)$ gilt. Die Menge der Tangentialapproximationen an $f\in B$ bezeichnen wir mit $T[f]$.

Wir wollen nun untersuchen, wie beste Approximationen mit

Tangentialapproximationen zusammenhängen.

Jedem $f\in B$ ordnen wir eine Abbildung $\mu_f: M\to\mathbb{R}$ durch

$$\mu_f(a) = \|f-F(a)\|$$

zu. Nun können wir das folgende Lemma beweisen, das in dem Fall, daß M offene Menge ist, von Brosowski [4,1969] bewiesen wurde:

Lemma 2.1:

Sei $f\in B; a\in M$ sei ein lokales Minimum von μ_f. Dann gilt $F(a)\in T[f]$.

Beweis:

Ist $f=F(a)$, so ist die Aussage trivial. Sei nun also $f\neq F(a)$. Wir beweisen die Aussage zunächst für den Fall, daß M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei U eine Umgebung von a, so daß für alle $b\in U$ $\mu_f(b)\geq\mu_f(a)$ gilt. Wir nehmen an, es existiert ein $\eta\in\mathbb{R}^n$, so daß

$$\|f-F(a)-F'(a)\cdot\eta\| < \|f-F(a)\| \qquad (2.1.1)$$

gilt. Nun gibt es ein $\xi\in\mathbb{R}$, $\xi>0$, so daß für alle $t\in[0,\xi)$ $a+t\eta$ aus U ist. Dann gilt für $t\in[0,\xi)$, $t<1$

$$\begin{aligned}\|F(a+t\eta)-F(a)-tF'(a)\cdot\eta\| &= \|(F(a+t\eta)-f)-(F(a)+tF'(a)\cdot\eta-f\| \\ &\geq \|F(a)-f\| - \|F(a)+tF'(a)\cdot\eta-f\| \\ &= \|F(a)-f\| - \|(1-t)(F(a)-f)+t(F(a)+F'(a)\cdot\eta-f)\| \\ &\geq \|F(a)-f\| - [(1-t)\|F(a)-f\|+t\|F(a)+F'(a)\cdot\eta-f\|] \\ &= t[\|F(a)-f\| - \|F(a)+F'(a)\eta-f\|].\end{aligned}$$

Dies ergibt mit (2.1.1) einen Widerspruch zur Differenzierbarkeit von F.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu.

Es sei (U,ϕ) eine Koordinatenumgebung von a,so daß für alle $b\in U$ $\mu_f(b)\geq\mu_f(a)$ gilt.Nun sei $\hat{M}=\phi[U]$, $\hat{F}=F_\phi$;setzt man noch abkürzend $\hat{\mu}_f(b)=\|f-\hat{F}(b)\|$ für alle $b\in\hat{M}$,so sind die Voraussetzungen des ersten Teils erfüllt,und bei Berücksichtigung von $T'(a)=\hat{F}'(\hat{a})\cdot[\mathbb{R}^n]$ erhält man die Behauptung mit $\hat{a}=\phi(a)$.

□

Lemma 2.2:

Ist $f\in B$ und $v_o\in\mathcal{F}$ lokal beste Approximation an f,so ist für jede Parametrisierung a für v_o a ein lokales Minimum von μ_f.

Beweis:

Es sei U eine Umgebung von v_o derart,daß für alle $v\in U$ $\|f-v\|\geq\|f-v_o\|$ gilt.Nun sei a eine Parametrisierung für v_o. Dann ist $\tilde{U}=\tilde{F}^{-1}[U]$ eine Umgebung von a,und für alle $b\in\tilde{U}$ gilt $\mu_f(b)\geq\mu_f(a)$.

□

Aus Lemma 2.1 und Lemma 2.2 ergeben sich folgende Inklusionen:

Ist $f\in B$,so gilt

(i) $P[f]\subset P^o[f]\subset T[f]$

(ii) $P^{oo}[f]\subset P^o[f]\subset T[f]$.

Nun folgt mit bekannten Ergebnissen aus der linearen Approximationstheorie der

Satz 2.3:

Es sei $f \in B, v_o \in \mathfrak{F}, v_o \neq f$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $v_o \in T[f]$

(ii) es existiert eine Parametrisierung a für v_o, so daß für alle $h \in \vec{T}(a)$

$$\inf \{ x'(h) : x' \in \mathcal{E}_{f-v_o} \} \leq o$$

gilt.

□

Aussagen von der Form

"$v_o \in P[f] \Rightarrow$ es gilt (ii)"

finden sich sehr viele in der Approximationstheorie. In dem Fall, wo M eine offene Menge ist, findet sich das Ergebnis bei Brosowski [4,1969]. Hoffmann [1969] untersuchte dieses Problem im Fall der Tschebyschev-Approximation auf einem kompakten topologischen Raum. Er ließ dabei Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform zu. Für den Fall, wo nur Gleichungen als Nebenbedingungen vorliegen, wurde das Problem dann von Gislason und Loeb [1972] weiter verfolgt und verbessert. Schließlich ist zu bemerken, daß die Bedingung (ii) oft durch eine äquivalente Bedingung in der Literatur auftaucht, nämlich daß man fordert, daß der Nullvektor eines gewissen Raumes in einer geeigneten konvexen Menge liegt.

Wir wollen nun die Beziehung von Satz 2.3 zur Optimierungstheorie untersuchen. Zuvor wollen wir einige Beziehungen darlegen, die wir an einigen Stellen immer wieder benötigen, nämlich Beziehungen über die lokale Darstellbarkeit einer Menge als Mannigfaltigkeit. Wir fassen dies zusammen unter dem

Problem 2.o:

Es sei k eine natürliche Zahl, $1 \leq k < n$, Es sei eine C^1-Abbildung $N: M \to \mathbb{R}^k$ gegeben, mit der Eigenschaft, daß für jedes $a \in \tilde{M}$ und jede Koordinatenumgebung (U,ϕ) von a die Abbildung $N'_\phi(\phi(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ surjektiv ist; dabei ist $\tilde{M}$ die Menge alle $a \in M$ mit $N(a)=\Theta$, und diese Menge sei nicht leer; ferner sei $N_\phi = N \circ \phi^{-1}: \phi[U] \to \mathbb{R}^k$. Wir machen nun nun $\tilde{M}$ zu einer (n-k)-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Es sei $a_o \in \tilde{M}$ und (U,ϕ) eine Koordinatenumgebung von a_o; sei $V=\phi[U]$. Zur Abkürzung sei $\hat{F}=F_\phi$ und $\hat{N}=N_\phi$. Ferner sei $\eta^o = \phi(a_o)$. Es sei $\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x_j}(\eta^o) = \alpha_{ij}$ $(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n)$, wobei $\hat{N}_i$ die Komponenten von $\hat{N}$ sind. Die Forderung, daß $\hat{N}'(\eta^o)$ surjektiv ist, besagt, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k,1} & \cdots & \alpha_{k,n} \end{pmatrix} \qquad \text{(B 2. 1.1)}$$

eine $k \times k$ Untermatrix mit Determinante $\neq o$ besitzt; o.E. sei dies die Matrix, die aus den ersten k Spalten der Matrix (B1.2.1) besteht, und wir bezeichnen diese mit A.

Zur Abkürzung sei die folgende Notation verwendet: Ist $\eta \in \mathbb{R}^n$, so sei $\eta'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ der Vektor, der aus η hervorgeht, wenn man die ersten k Komponenten wegläßt. Nach Satz 6.1, Kap. 4 in dem Lehrbuch von Grauert und Fischer [1968] existiert eine offene Umgebung $\tilde{V}$ von η^0, $\tilde{V} \subset V$, und eine offene Umgebung $\tilde{V}''$ von $(\eta^0)''$, $\tilde{V}'' \subset \mathbb{R}^{n-k}$, sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $G=(g_1,\ldots g_k)$ von $\tilde{V}''$ nach $\mathbb{R}^k$, so daß

$$\tilde{V} \cap \left\{ \eta \in V : \hat{N}(\eta)=\Theta \right\} = \left\{ (G(\eta''),\eta'') \in \mathbb{R}^n : \eta'' \in \tilde{V}'' \right\}$$

gilt. Durch $R(\eta'')=(G(\eta''),\eta'')$ ist eine invertierbare, stetig differenzierbare Abbildung $R:\tilde{V}'' \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei Sei $\tilde{U}=\phi^{-1}[\tilde{V}]$ und $U'=\left\{ a \in \tilde{U} : N(a)=\Theta \right\}$. Dann ist $U'=\tilde{U} \cap \tilde{M}$. Sei nun $\eta \in R[\tilde{V}'']$. Dann ist $\eta \in \tilde{V}$ und $\hat{N}(\eta)=\Theta$. Also ist $\phi^{-1}(\eta) \in \tilde{U}$ und $N(\phi^{-1}(\eta))=\Theta$. Somit ist $\phi^{-1}[R[V'']] \subset U'$. Ist umgekehrt $a \in U'$, so ist $a \in \tilde{U}$ und $N(a)=\Theta$. Sei $\eta=\phi(a)$. Dann ist $\eta \in \tilde{V}$ und $\hat{N}(\eta)=\Theta$. Also $\eta \in R[V'']$. Somit ist $\phi[U'] \subset R[\tilde{V}'']$ und es ist $\phi[U']=R[\tilde{V}'']$.

Es ist nun eine Abbildung $\psi:U' \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch $\psi(a)=R^{-1} \circ \phi(a)$ gegeben. Da $R^{-1} \circ \phi(a)=(\phi(a))''$ für alle $a \in U'$ gilt, ist ψ ein Homöomorphismus zwischen V'' und U'.

Wir machen diese Konstruktion für jeden Punkt aus $\tilde{M}$. Auf diese Weise erhalten wir Paare (U',ψ), wobei U' eine offene Teilmenge von $\tilde{M}$ ist und ψ ein Homöomorphismus von U' auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n-k}$ ist. Seien nun (U_1',ψ_1) und (U_2',ψ_2) zwei solche Paare mit $U_1' \cap U_2' \neq \emptyset$. Nach Konstruktion existieren dann Koordinatensysteme $(\tilde{U}_1,\phi_1)$ und $(\tilde{U}_2,\phi_2)$ für M, so daß $U_1' = \tilde{U}_1 \cap \tilde{M}$ und $U_2' = \tilde{U}_2 \cap \tilde{M}$

gilt.Es sei $W_1=\psi_1[U_1' \cap U_2']$ und $W_2=\psi_2[U_1' \cap U_2']$ .Für $\eta \in W_1$ ist $\psi_1^{-1}(\eta)=\phi_1^{-1} \circ R_1(\eta)$,also $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(\eta)=(\phi_2(\phi_1^{-1} \circ R_1(\eta)))"$.Eine analoge Beziehung ergibt sich für $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ auf W_2.Damit ist die Kompatibilität der Paare (U',ψ),die nach obigem Prinzip konstruiert wurden,bewiesen und $\tilde{M}$ wird zu einer(n-k)-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^1. Es sei nun $a \in \tilde{M}$ und (U',ψ) eine Koordinatenumgebung um a in $\tilde{M}$.Wiederum existiert eine Koordinatenumgebung $(\tilde{U},\phi)$ um a in M mit $U'=\tilde{U} \cap \tilde{M}$.Sei $W=\psi[U']$ und $\eta \in W$.Dann ist $\psi^{-1}(\eta)=\phi^{-1} \circ R(\eta)$,also $\phi \circ \psi^{-1}(\eta)=R(\eta)$.Folglich ist die Abbildung $F_\psi = F \circ \psi^{-1} : W \to B$ eine C^1-Abbildung.Damit ist auch $\tilde{F}:\tilde{M} \to B$ eine C^1-Abbildung.Für die Tangentialräume gilt

$$\tilde{T}(a)=F\psi(\psi(a))[\mathbb{R}^{n-k}] = F_\phi'(\phi(a)) \circ (\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(a))[\mathbb{R}^{n-k}] .$$

Setzt man nun

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k+1} \cdots\cdots\cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{k,k+1} \cdots\cdots\cdots & \alpha_{k,n} \end{pmatrix}$$

und ist E_{n-k} die $(n-k) \times (n-k)$ Einheitsmatrix,so ist nach Satz 6.2,Kap.4 bei Grauert/Fischer [1968]

$$(\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(a)) = R'(\phi(a)") = \begin{pmatrix} -A^{-1}B \\ E_{n-k} \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist eine $n \times (n-k)$ Matrix.Es sei Q der durch sie repräsentierte Operator von $\mathbb{R}^{n-k}$ nach $\mathbb{R}^n$.Dann ist ein Vektor $(\lambda_1,\ldots\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann aus $Q[\mathbb{R}^{n-k}]$,wenn es $(\sigma_1,\ldots\sigma_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ gibt,so daß

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ E_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}B \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{n-k} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

gilt.Dies ist genau dann der Fall,wenn

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n-k} \end{bmatrix} \qquad (B2.1.2)$$

gilt.

Beispiel 2.1:

Wir wenden uns nun dem Optimierungsproblem zu.Wir betrachten ein Problem von der Form:

Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.Es seien stetig differenzierbare Abbildungen $N_i: \Omega \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$ gegeben; dabei ist k eine natürliche Zahl, $1 \leq k < n$.Gesucht ist das Minimum einer Funktion f auf

$$\tilde{M} = \left\{ a \in \Omega : N_i(a) = 0 \; i=1,\ldots k \right\} .$$

Es sei nun a_o ein lokales Minimum von f auf $\tilde{M}$ .Es sei $N'(a_o) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ surjektiv,wobei N die durch $N(a) = (N_1(a), \ldots N_k(a))$ gegebene Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}^k$ ist. Dann läßt sich M in a_o lokal zu einer C^1-Mannigfaltigkeit machen.Wir können dort o.E. f als positiv voraussetzen;dann ist dort $f(a_o)$ eine lokal beste Approximation an die reelle Zahl o,d.h. $f(a_o) \in T[o]$ .Also gilt

$$\inf \left\{ x'(h) : x' \in \mathcal{E}_{f(a_o)} \right\} \leq o$$

für alle $h \in T^*(a_o)$. Daher ist $T^*(a_o) = \{o\}$.

Es sei nun $h \in \mathbb{R}^n$ mit $N'(a_o) \cdot h = \Theta$. Mit den früheren Bezeichnungen ist dann

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \Theta \quad ,$$

also

$$A \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} h_{k+1} \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \Theta \; .$$

Damit ist $f'(a_o) \cdot (h_1, \ldots h_n) \in T^*(a_o)$ und es gilt

$$\operatorname{Ker} f'(a_o) \supset \left[\bigcap_{i=1}^{K} \operatorname{Ker} N_i'(a_o) \right] \quad .$$

Folglich existieren $\xi_1, \ldots \xi_K \in \mathbb{R}$, so daß

$$f'(a_o) = \sum_{i=1}^{K} \xi_i N_i'(a_o)$$

gilt.

Θ

In dem folgenden Beispiel untersuchen wir, wie sich die notwendige Bedingung bei Gislason/Loeb [1972] aus Satz 2.3 ableiten läßt.

Beispiel 2.2 (Gislason/Loeb [1972])

Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Es sei F eine Abbildung von Ω nach $C[o,1]$. Fernerseien k Nebenbedingungen $(1 \leq k < m)$ an die Parameter vorgegeben:

$$M = \{ a \in \Omega : \mathcal{N}(a) = \Theta \} \quad .$$

Dabei ist $\mathcal{N} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Ab-

bildung.Die Menge M sei nicht leer.

Setzt man voraus,daß für alle $a \in M$ $\mathcal{N}'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ surjektiv ist,so existiert auf M eine Differenzierbarkeitsstruktur,so daß M eine (m-k)-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit ist und $\tilde{F}=F|M$ eine C^1-Abbildung von M nach $C[o,1]$ ist.Dies haben wir unter Problem 2.o genauer untersucht.Dort haben wir auch die Tangentialräume für das Problem mit Nebenbedingungen berechnet.

Es werden noch einige zusätzliche Voraussetzungen gemacht.Die Dimension der linearen Teilräume $F'(a)[\mathbb{R}^m]$ sei für jedes $a \in \Omega$ größer als k.Ferner gelte die Bedingung:Ist $a \in \Omega$ und $\frac{\partial F(a)}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial F(a)}{\partial a_d}$ eine Basis von $F'(a)[\mathbb{R}^m]$,so habe die Matrix

$$\left(\frac{\partial N_i(a)}{\partial a_j} \right) \quad i=1,..k \; j=1,...d$$

Maximalrang.Hierbei sind $N_1,...N_k$ die Komponenten von . Aus der Formel B2.1.2 des vorigen Beispiels sieht man nun sofort,daß die bei Gislason und Loeb eingeführten "Tangentialräume" den unseren entsprechen,d.h.es ist $\tilde{T}(a)$ die Menge der Linearkombinationen von $\frac{\partial F(a)}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial F(a)}{\partial a_d}$,deren Koeffizienten $c_1,...c_d$ der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{d} c_j \frac{\partial N_i(a)}{\partial a_j} = o$$

für i=1,...k genügen.Daher erhalten wir aus Satz 2.3 das wesentliche Lemma 3 von Gislason und Loeb.

□

Wir werden im folgenden Abschnitt die Vorzeichenbedingung benötigen, die von Krabs [2, 1969] im Spezialfall der Tschebyschev-Approximation auf einem kompakten metrischen Raum eingeführt wurde. Brosowski und Wegmann [197o] haben eine entsprechende Bedingung für die Approximation in einem allgemeinen normierten Raum eingeführt. Wir sehen zunächst, daß die Bedingung von Brosowski und Wegmann einer Bedingung entspricht, die später von Wulbert [1971] weiterverwendet wurde, ohne den Zusammenhang festzustellen. Die Bedingung von Krabs wird sich dann im nächsten Paragraphen als Spezialfall der Bedingung von Brosowski und Wegmann ergeben.

Definition:

F erfüllt die Vorzeichenbedingung, falls für alle $f \in B, f \neq \Theta$ und $v_o \in \mathcal{F}$ die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Gibt es ein $v_1 \in \mathcal{F}$ mit $x'(v_1 - v_o) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_f$, so existiert zu jeder Parametrisierung a für v_o ein $h \in T^{\vee}(a)$ mit $x'(h) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_f$.

Nun ergibt sich das einfache

Lemma 2.4:

Erfüllt F die Vorzeichenbedingung, so gilt $T[f] = P[f]$ für alle $f \in B$.

Beweis:

Es sei $f \in B$ und $v \in T[f]$. Ist $v = f$, so ist natürlich $v \in P[f]$. Andernfalls ist $v \neq f$ und wir nehmen an, es existiert ein $v_1 \in \mathcal{F}$ mit $x'(v_1 - v) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_{f-v}$. Da F die

Vorzeichenbedingung erfüllt,existiert zu jeder Parametrisierung a für v ein $h \in T^{\vee}(a)$ mit $x'(h) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_{f-v}$.Wegen Satz 2.3 ist dann $v \notin T[f]$ mit Widerspruch.Daher gilt

$$\inf \{ x'(v_1 - v) : x' \in \mathcal{E}_{f-v} \} \leq o$$

für alle $v_1 \in \mathcal{F}$ und damit ist $v \in P[f]$.

□

Diese Bedingung spielt auch bei Wulbert[1971]eine ausgezeichnete Rolle.Mit dem folgenden Lemma werden wir sehen,daß beide Bedingungen äquivalent sind.

Lemma 2.5:

Wenn $T[f]=P[f]$ für alle $f \in B$ gilt,so erfüllt F die Vorzeichenbedingung.

Beweis:

Zunächst rechnet man nach,daß $\mathcal{F}$ eine α-Sonne ist. Sei nun $f \in B$ und $v_o \in \mathcal{F}$ und es existiere ein $v_1 \in \mathcal{F}$ mit $x'(v_1 - v_o) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_f$.Dann ist $v_o \notin P[f+v_o]$ $=T[f+v_o]$ .Daher existiert zu jeder Parametrisierung a für v_o ein $h \in T^{\vee}(a)$ mit $x'(h) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_f$.

□

§ 3 Tschebyschev-Approximation

Es sei T ein kompakter topologischer Raum mit mindestens n+1 Punkten. Es sei $B=C(T)$, der lineare Raum der stetigen, reellwertigen Abbildungen auf T, versehen mit der Tschebyschev-Norm.

Ist $a \in M$, so ist $F(a) \in C(T)$; wir bezeichnen den Funktionswert von $F(a)$ an einer Stelle $t \in T$ mit $F(a,t)$.

Zunächst klären wir, wie sich die Vorzeichenbedingung in diesem Raum schreiben läßt.

Definition:

Ein V-System (V_1, V_2) bezüglich $v \in \mathcal{F}$ ist ein Paar disjunkter, abgeschlossener Teilmengen von T mit den beiden Eigenschaften:

(i) $V_1 \cup V_2 \neq \emptyset$

(ii) Es existiert ein $\tilde{v} \in \mathcal{F}$, so daß gilt

$$V_1 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t) - v(t) > 0 \}$$

$$V_2 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t) - v(t) < 0 \} \quad .$$

Um zu sehen, daß die in § 2 gegebene Definition der Vorzeichenbedingung mit der von Krabs [2,1969] übereinstimmt, beweisen wir das

Lemma 3.1:

F erfüllt genau dann die Vorzeichenbedingung, wenn zu jedem $v \in \mathcal{F}$ und jedem V-System (V_1, V_2) bezüglich v zu jeder Parametrisierung a für v ein $h \in T^*(a)$ existiert, so daß gilt:

(i) für alle $t \in V_1$ ist $h(t) > 0$

und

(ii) für alle $t \in V_2$ ist $h(t) < o$.

Beweis:

F erfülle die Vorzeichenbedingung. Es sei $v \in \mathcal{F}$ und (V_1, V_2) ein V-Sytem bezüglich v, so daß für ein $\tilde{v} \in \mathcal{F}$ gilt: Für alle $t \in V_i$ ist $(-1)^{i+1}(\tilde{v}(t)-v(t)) > o$ $(i=1,2)$. Nun sei $\eta = \inf \{ |\tilde{v}(t)-v(t)| : t \in V_1 \cup V_2 \}$. Dann ist $\eta > o$. Es seien U_1 und U_2 offene Teilmengen von T, so daß $U_1 \supset V_1$, $U_2 \supset V_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und

$$\text{für alle } t \in U_1 \text{ ist } \tilde{v}(t)-v(t) > \frac{\eta}{2} \; ;$$

$$\text{für alle } t \in U_2 \text{ ist } \tilde{v}(t)-v(t) < -\frac{\eta}{2}$$

gilt. Dann seien $f_1, f_2 \in C(T)$ mit $f_i[T] \subset [o,1]$ $(i=1,2)$ und

$$f_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in V_i \\ o & \text{falls } t \in T \setminus U_i \end{cases} \qquad (i=1,2).$$

Sei nun $f = f_1 - f_2$ und M_f sei die Menge aller Abweichungspunkte von f. Dann ist $M_f \subset U_1 \cup U_2$ und daher ist für alle $t \in M_f$ $f(t)(v(t)-v(t)) > o$. Da F die Vorzeichenbedingung erfüllt, existiert zu jeder Parametrisierung a für v ein $h \in T^*(a)$ mit $f(t)h(t) > o$ für alle $t \in M_f$. Dann ist $h(t) > o$ für alle $t \in V_1$ und $h(t) < o$ für alle $t \in V_2$.

Sei jetzt umgekehrt die Bedingung in der Behauptung erfüllt. Es sei $f \in B^{f \neq \Theta}$ und $v_o \in \mathcal{F}$. Es existiere ein $v_1 \in \mathcal{F}$ mit $x'(v_1-v_o) > o$ für alle $x' \in \mathcal{E}_f$. Es sei a eine Parametrisierung für v_o. Nun gilt für alle $t \in M_f$ $f(t)(v_1(t)-v(t)) > o$. Setze $V_1 = \{ t \in M_f : f(t) > o \}$ und $V_2 = \{ t \in M_f : f(t) < o \}$.

Dann ist (V_1,V_2) ein V-System bezüglich v_o.Also existiert ein $h\in T^*(a)$ mit $f(t)h(t)>o$ für alle $t\in M_f$.Also gilt $x'(h)>o$ für alle $x'\in \mathcal{E}_f$.

θ

Bemerkung:In diesem Lemma haben wir bereits die Darstellung der Extremalfunktionale als Punktfunktionale benutzt.

Die Vorzeichenbedingung sichert,daß die Differenzen von Funktionen aus $\mathcal{F}$ eine ähnliche Vorzeichenstruktur wie die Funktionen aus den Tangentialräumen haben. Solche Bedingungen spielen bei Eindeutigkeitsbetrachtungen eine wesentliche Rolle.Ferner können die Tangentialräume nicht ausgeartet sein,wenn F die Vorzeichenbedingung erfüllt,wenn nur $\mathcal{F}$ nicht trivial ist: Es enthalte $\mathcal{F}$ mindestens 2 Funktionen.Wir nehmen an, es gibt ein $a\in M$ mit $d(a)=o$.Nun sei $v\in\mathcal{F}$ mit $v\neq F(a)$ und $t\in T$ mit $v(t)\neq F(a,t)$;o.E.sei $v(t)-F(a,t)>o$.Dann ist $(\{t\},\emptyset)$ ein V-System.Aber es existiert kein $h\in T^*(a)=\{\Theta\}$ mit $h(t)>o$.Also kann es ein solches a nicht geben.Im folgenden werden wir also stets o.E. $\mathcal{F}$ als nicht trivial voraussetzen.
Eine wichtige Funktionenklasse,die die Vorzeichenbedingung erfüllt,erhält man durch solche F,welche die Darstellbarkeitsbedingung erfüllen.

Definition:

F erfüllt die Darstellbarkeitsbedingung,falls es zu $v, v_o \in \mathcal{F}$ und zu jeder Parametrisierung a für v_o ein $h \in T^*(a)$ und eine Funktion $\varphi \in C(T)$ mit

(i) $\varphi(t) > o$ für alle $t \in T$

(ii) $v(t) - v_o(t) = \varphi(t) h(t)$ für alle $t \in T$

gibt.

Nun gilt nach Krabs [1,1967] das

Lemma 3.2:

F ist genau dann asymptotisch konvex,wenn F die Darstellungsbedingung erfüllt.

Der Beweis ist in unserem etwas allgemeineren Fall unmittelbar übertragbar.Dabei verwenden wir die folgende Definition,die etwas spezieller als die allgemeine von Meinardus/Schwedt [1964] gegebene ist,aber für glatte Funktionenfamilien die passende ist:

Definition:

F heißt asymptotisch konvex,falls zu $a,b \in M$ eine differenzierbare Kurve $[o,1] \ni \varrho \mapsto a(\varrho) \in M$ existiert mit $a(o)=a$,sowie eine stetige Abbildung $g: T \times [o,1] \to \mathbb{R}$,so daß

$$\| (1 - g(.,\varrho)) F(a) + g(.,\varrho) F(b) - F(a(\varrho)) \| = o(\varrho)$$

gilt.

Die Darstellbarkeitsbedingung wurde unter der Bezeichnung Formel F von Brosowski eingeführt,siehe etwa [2, 1967].Die Bezeichnung Darstellbarkeitsbedingung stammt von Krabs [1,1967].

Beispiel 3.1(Brosowski[1,1965])

Es seien $u_o, u_1, \ldots u_n \in C[o,1]$. Ferner sei $C=(c_{\nu\mu})$ eine $m\times(n+1)$-Matrix mit reellen Koeffizienten und $d=(d_\mu)$ ein Vektor des $\mathbb{R}^m$. Es sei $m \leq n$ und $Rang(C)=m$.

Mit $V_{n,m}$ wird die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=o}^{n} a_i u_i$ bezeichnet, welche der Nebenbedingung

$$C \begin{pmatrix} a_o \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \qquad (B3.1.1)$$

genügen.

Nun sei M die Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$, welche die Gleichung (B3.1.1) erfüllen. Dann ist M in natürlicher Weise eine $(n-m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $F:M\to B$ eine C^1-Abbildung:

$$M \ni (a_o, \ldots a_n) \longmapsto F(a_o, \ldots a_n) = \sum_{i=o}^{n} a_i u_i \ .$$

Dann ist für alle $a \in M$ $T(a)$ die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{i=o}^{n} a_i u_i$ welche die Gleichung

$$C \begin{pmatrix} a_o \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ \vdots \\ o \end{pmatrix} \qquad (B3.1.2)$$

erfüllen.

Dann erfüllt F die Darstellbarkeitsbedingung und es ergibt sich sofort aus den Sätzen aus § 2 der Charakterisierungssatz für beste Approximationen von Brosowski.

Dieser lautet folgendermaßen:

Ist $f \in C[o,1]$ und $p \in V_{n,m}$, $f \neq p$, so ist p genau dann beste Approximation an f, wenn es kein $h \in \overline{V}_{n,m}$ gibt, so daß die

Ungleichung $(f(t)-p(t))h(t) > o$ für alle Extremalpunkte von f-p erfüllt ist.

Die Notwendigkeit folgt aus Satz 2.3,die Hinlänglichkeit aus Satz 2.4,berücksichtigt man,daß die Darstellbarkeitsbedingung die Vorzeichenbedingung impliziert.

Dabei ist $\overline{V}_{n,m}$ die Menge der Linearkombinationen von $u_o,\ldots u_n$,die die Gleichung B3.1.2 erfüllen.

θ

Der Begriff der Signaturen spielt in der Tschebyschev-Approximation eine ausgezeichnete Rolle.Signaturen wurden von Rivlin und Shapiro[1961] eingeführt und von Brosowski [3,1968] ausführlich diskutiert.

Eine T-Signatur sei ein Paar (M^+,M^-) von abgeschlossenen,disjunkten Teilmengen von T mit $M^+ \cup M^- \neq \emptyset$.Wir schreiben $\mathfrak{M} = (M^+,M^-)$ .Ist $v_o \in \mathcal{F}$,so heißt eine T-Signatur extremal für v_o,wenn für alle v

$$\inf \left\{ \varepsilon_{\mathfrak{M}}(t)(v(t)-v_o(t)) : t \in M^+ \cup M^- \right\} \leq o$$

gilt;dabei ist

$$\varepsilon_{\mathfrak{M}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in M^+ \\ -1 & \text{falls } t \in M^- \end{cases} .$$

Jedem $f \in C(T) \setminus \{\Theta\}$ wird die T-Signatur $\mathfrak{M}_f = (M_f^+,M_f^-)$ mit $M_f^+ = \{ t \in T : f(t) = \|f\| \}$ und $M_f^- = \{ t \in T : -f(t) = \|f\| \}$ zugeordnet.Dann ist $M_f = M_f^+ \cup M_f^-$ die Menge der Abweichungspunkte von f.

Berücksichtigt man die Darstellung der Extremalfunktionale,so lautet das Kolmogoroff-Kriterium hier:

Ist $f \in C(T)$ und $v_o \in \mathcal{F}$, $f \neq v_o$, und ist $\mathcal{M}_{f-v_o}$ extremal für v_o, so gilt $v_o \in P[f]$.

Im Zusammenhang mit einer T-Signatur $\mathcal{M} = (M^+, M^-)$ steht die Konstruktion von Funktionen $\varepsilon \in C(T)$ mit der Eigenschaft

(i) $-1 < \varepsilon(t) < 1$ für alle $t \in M^+ \cup M^-$

(ii) $\varepsilon(t) = 1$ für alle $t \in M^+$

(iii) $\varepsilon(t) = -1$ für alle $t \in M^-$.

Ist T perfekt normal (Siehe Dugundij [1968]), so existieren stets solche Funktionen. Ein metrischer Raum ist perfekt normal.

Bei der Betrachtung von Eindeutigkeitsfragen interessieren Aussagen über die Anzahl von Punkten, die einer T-Signatur angehören. Um Ergebnisse hier erhalten zu können, benötigen wir die folgenden Definitionen:

Ein r-dimensionaler Teilraum H von C(T), $r \geq 1$ heißt ein Haarscher Raum der Dimension r, falls jedes $h \in H$, $h \neq \Theta$ höchstens r-1 Nullstellen besitzt.

F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung, falls für jedes $a \in M$ $d(a) \geq 1$ ist und $T(a)$ ein Haarscher Raum der Dimension d(a) ist.

F erfüllt die globale Haarsche Bedingung, falls für jedes $a \in M$ $d(a) \geq 1$ ist und jede Differenz F(b)-F(a) höchstens d(a)-1 Nullstellen hat oder identisch verschwindet.

F erfüllt die Haarsche Bedingung, wenn F sowohl die globale als auch die lokale Haarsche Bedingung erfüllt.

Es sei $\mathcal{M}=(M^+,M^-)$ eine T-Signatur;es sei $a\in M$ und für alle $h\in T^*(a)$ gelte

$$\inf\{\varepsilon_{\mathcal{M}}(t)h(t) : t\in M^+\cup M^-\}\leq 0 \quad .$$

Dann heißt $\mathcal{M}$ tangential extremal für F(a).

Der Zusammenhang zwischen extremalen und tangential extremalen T-Signaturen ist nun durch die Vorzeichenbedingung gegeben.

Lemma 3.3:

Es sei T perfekt normal und $v_o\in\mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{M}$ eine für v_o extremale T-Signatur,so ist $\mathcal{M}$ tangential extremal für F(a),wobei a eine Parametrisierung für v_o ist.Die Umkehrung gilt,falls F die Vorzeichenbedingung erfüllt.

Beweis:

Es sei $\mathcal{M}$ extremal für v_o.Man bestimme $\varepsilon\in C(T)$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) und setze $f=\varepsilon+v_o$.Dann ist $\mathcal{M}_{f-v_o}=\mathcal{M}$ und daher $v_o\in P[f]$.Ist nun a eine Parametrisierung für v_o,so ist $\mathcal{M}$ nach Satz 2.3 tangential extremal für F(a).

Umgekehrt sei $\mathcal{M}$ tangetial extremal für F(a).Sei $\varepsilon\in C(T)$ wie oben gewählt und $f=\varepsilon+F(a)$ .Dann gilt $F(a)\in T[f]$ und da F die Vorzeichenbedingung erfüllt ist $\mathcal{M}$ extremal für F(a).

θ

Ist $a\in M$ und $T^*(a)$ ein Haarscher Raum,so muß jede für F(a) tangential extrenmale T-Signatur mindestens d(a)+1 Punkte enthalten.Dies ergibt sich sofort aus der Interpoltionsbedingung,die Haarsche Räume erfüllen.

Wir wenden uns nun dem Zusammenhang zwischen der lokalen und globalen Haarschen Bedingung auf der einen Seite und der Eindeutigkeitsaussage auf der anderen zu. Im linearen Fall stimmen die lokale und die globale Haarsche Bedingung überein und sind äquivalent zu der Aussage, daß das lineare Approximationsproblem eindeutig lösbar ist. Untersuchungen im linearen Fall, wo als Parametermenge eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird, werden von Rice [1, 1964] durchgeführt.

Grundlegende Bedeutung für das folgende hat das

Lemma 3.4:

Es erfülle F die Vorzeichenbedingung. Es seien $a, b \in M$, $F(a) \neq F(b)$ und $F(b)-F(a)$ habe $r=d(a)$ Nullstellen $t_1, \ldots, t_r \in T$. Dann existiert ein $f \in C(T)$ mit $F(a) \in P[f]$ und $F(b) \in P[f]$.

Ist T perfekt normal, so kann erreicht werden, daß $M_{f-F(b)} \subset \{ t_1, \ldots, t_r \}$ gilt.

Beweis:

Es sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von $T^*(a)$. Ferner sei die Funktion $G \in C(T)$ durch $G(t) = |F(b,t)-F(a,t)|$ für alle $t \in T$ definiert. Es sei $\alpha = \| G \|$. Man wähle nun ein $t_o \in T$ mit $F(a,t_o)-F(b,t_o) \neq o$. Dann existiert ein Vektor $(\lambda_o, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{\Theta\}$, so daß

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i u_j(t_i) = o \qquad (3.4.1)$$

für $j=1, \ldots r$ gilt.

Wir unterscheiden nun 2 Fälle; wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t_1) \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} u_1(t_r) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t_r) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind,so sprechen wir von Fall1,andernfalls von Fall 2.

Im Fall 1 ist $\beta_o \neq o$ und es sei o.E.

$$\text{sign } \beta_o = \eta := \text{sign}(F(b,t_o)-F(a,t_o)) .$$

Im Fall 2 sei $\beta_o = o$.

$$J := \{ j \in \{o,\ldots r\} : \beta_j \neq o \}$$

$$J^* := \{ j \in \{o,\ldots r\} : \beta_j = o \}$$

Nun sei $g \in C(T), \|g\|=1$ mit

$$g(t_j) = \text{sign } \beta_j$$

für alle $j \in J$.

(Ist T perfekt normal,so sei $|g(t)|<1$ für alle $t \in T$,die nicht in $\{ t_j : j \in J \}$ liegen.)

Sei $f \in C(T)$ die durch

$$f(t)=g(t)(\alpha - G(t)) + F(b,t)$$

für alle $t \in T$ definierte Funktion.

Dann gilt $\|f-F(a)\| \leq \alpha$,denn für alle $t \in T$ gilt die Abschätzung

$$|f(t)-F(a,t)| \leq |g(t)| (\alpha - G(t)) + |F(b,t)-F(a,t)|$$
$$\leq \alpha - G(t) + G(t) = \alpha .$$

Es ist sogar $\|f-F(a)\| = \alpha$.

Im Fall 1 ist $o \in J$ und dann gilt

$$f(t_o)-F(a,t_o)=g(t_o)(\alpha - G(t_o)) + F(b,t_o)-F(a,t_o)$$

$$= \eta\alpha - \eta G(t_o) + \eta G(t_o) = \eta\alpha,$$

also $|f(t_o)-F(a,t_o)| = \alpha$.

Im Fall 2 ist für ein $j \in \{0,\dots r\}$ $\beta_j \neq o$ und für dieses j gilt dann

$$f(t_j)-F(a,t_j) = g(t_j)\alpha$$

und somit $|f(t_j)-F(a,t_j)| = \alpha$.

Insbesondere gilt in jedem Fall $\{ t_j : j \in J \} \subset M_{f-F(a)}$.

Wegen (3.6.1) gilt für jedes $h \in T^*(a)$ $\sum_{i=0}^{r} \beta_i h(t_i) = o$, denn h hat eine Darstellung $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i$ und so gilt

$$\sum_{i=0}^{r} \beta_i h(t_i) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i \Big(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j(t_i) \Big)$$
$$= \sum_{i=0}^{r} \alpha_j \Big(\sum_{i=0}^{r} \beta_i u_j(t_i) \Big) = o .$$

Somit gilt für alle $h \in T^*(a)$ auch $\sum_{i \in J} \beta_i h(t_i) = o$ bzw.

$$\inf \{ \beta_j h(t_j) : j \in J \} \leq o \quad . \quad (3.4.2)$$

Damit gilt aber für alle $h \in T^*(a)$ auch

$$\eta(h) := \inf \{ (f(t)-F(a,t))h(t) : t \in M_{f-F(a)} \} \leq o.$$

Denn für alle $h \in T^*(a)$ gilt

$$\eta(h) \leq \inf \{ (f(t_j)-F(a,t_j))h(t_j) : j \in J \}$$

und es ist

$$f(t_j)-F(a,t_j) = g(t_j)(\alpha - G(t_j)) + F(b,t_j)-F(a,t_j)$$
$$= (\operatorname{sign}\beta_j)(\alpha - G(t_j)) + F(b,t_j)-F(a,t_j)$$

$$\begin{cases} \eta\alpha - \eta G(t_o) + \eta G(t_o) = \alpha \operatorname{sign}\beta_o & \text{für } j=o \text{ im Fall 1} \\ \alpha \operatorname{sign}\beta_j & \text{für } j \in J \setminus \{o\} \quad " \\ \alpha \operatorname{sign}\beta_j & \text{für alle } j \in J \text{ im Fall 2} \end{cases}$$

da für $j=1,\dots r$ $F(b,t_j)-F(a,t_j)=o$ gilt.

Also ist $\eta(h) \leq \inf \{ h(t_j)\operatorname{sign}\beta_j : j \in J \} \leq o$ für

alle $h \in T^{*}(a)$. Damit ist $F(a) \in T[f]$ und da F die Vorzeichenbedingung erfüllt ist $F(a) \in P[f]$.

Nun ist aber auch $\| f-F(b) \| \leq \alpha = \| f-F(a) \|$ und so ist auch $F(b) \in P[f]$.

(Ist T perfekt normal, so ist sogar $M_{f-F(b)}$ in der Menge $\{ t_j : \underset{j \neq 0}{j \in J} \}$ enthalten.)

□

Diese Lemma wird sich als sehr nützlich erweisen, um notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abzuleiten, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ eine T-Menge ist.

Unmittelbar folgt aus Lemma 3.4 der

Satz 3.5:

F erfülle die Vorzeichenbedingung und $\tilde{\mathcal{F}}$ sei T-Menge. Dann erfüllt F die globale Haarsche Bedingung.

Beweis:

Gibt es $a,b \in M$, $F(a) \neq F(b)$ und $F(b)-F(a)$ hat mindestens d(a) Nullstellen, so existiert nach dem vorhergehenden Lemma ein $f \in C(T)$ mit $F(a) \in P[f]$ und $F(b) \in P[f]$. Dies ist ein Widerspruch.

□

Damit haben wir sehr einfach eine notwendige Bedingung gefunden. Der folgende Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung an.

Satz 3.6:

F erfülle die Vorzeichenbed. und die lokale Haarsche Bed.T sei perfekt normal oder es existiere ein $a \in M$ mit $d(a) \geq 2$. Dann ist $\mathcal{F}$ T-Menge.

Beweis: Aus dem bekannten Satz von Mairhuber [1956] folgt indem Fall $d(a) \geq 2$, daß T perfekt normal ist.

Wir nehmen nun an, es gibt ein $f \in C(T)$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen $v_o, v_1 \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ eine α-Sonne ist, folgt nach dem Durchschnittssatz (siehe Brosowski [3,1968]), daß die durch

$$\mathfrak{M}_1 := (M_1^+, M_1^-)$$

mit $M_1^+ := M^+_{f-v_o} \cap M^+_{f-v_1}$ und $M_1^- := M^-_{f-v_o} \cap M^-_{f-v_1}$ definierte T-Signatur extremal für v_o ist.

Es sei a eine Parametrisierung für v_o. Dann ist $\mathfrak{M}_1$ auch tangential extremal für F(a). Da F die lokale Haarsche Bedingung erfüllt, muß $M_1^+ \cup M_1^-$ mindestens d(a)+1 Punkte enthalten. Also gibt es r=d(a) Punkte $t_1, \ldots t_r \in T$ mit $F(b,t_i)-F(a,t_i)=o$ für $i=1,\ldots r$.

Nach Lemma 3.4 existiert dann ein $f_1 \in C(T)$ mit den besten Approximationen F(a) und F(b). Dabei sei b eine Parametrisierung für v_1. Eine weitere Anwendung des Durchschnittssatzes ergibt, daß die durch

$$\mathfrak{M}_2 := (M_2^+, M_2^-)$$

mit $M_2^+ := M^+_{f_1-v_o} \cap M^+_{f_1-v_1}$ und $M_2^- := M^-_{f_1-v_o} \cap M^-_{f_1-v_1}$ extremal für v_o ist. Dann ist $\mathfrak{M}_2$ auch tangential extremal für F(a). Aber $M_{f_1-v_o} \cap M_{f_1-v_1}$ ist in $\{t_1, \ldots t_r\}$

enthalten,also auch $M_2^+ \cup M_2^-$ mit Widerspruch.

□

Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 3.7:

F erfülle die Vorzeichenbedingung:Dann gelten die Implikationen

F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung $\Rightarrow$

$\mathcal{F}$ ist T-Menge $\Rightarrow$

F erfüllt die globale Haarsche Bedingung.

Aus diesem Satz ist nun der Eindeutigkeitssatz von Krabs[3,197o] leicht abzuleiten.

Brosowski[2,1967] hat diese Folge von Implikationen unter der Voraussetzung der Darstellbarkeitsbedingung untersucht.Im Beweis von

" $\mathcal{F}$ ist T-Menge $\Rightarrow$ F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung"

tritt jedoch eine Lücke auf,die auch hier nicht geschlossen werden konnte.Dolganov[1972] versuchte dies ebenfalls,doch in seinem Beweis istein Fehler. Also kann unter der stärkeren Voraussetzung der Darstellbarkeitsbedingung bislang nicht auf die Äquivalenz der 3 Bedingungen geschlossen werden.

Im Fall der rationalen Approximation sind diese Bedingungen äquivalent.Im folgenden Beispiel werden wir herausarbeiten,weshalb der Schluß

"F erfüllt die globale Haarsche Bedingung $\Rightarrow$ F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung"

möglich (und einfach) ist.

Dieser Schluß ist dann einfach,wenn zu jedem $a \in M$ und $h \in T^*(a)$ ein $b \in M$ existiert,so daß mit einer geeigneten Funktion $\varphi \in C(T)$, $\varphi(t) > o$ für alle $t \in T$,gilt

$$F(b)-F(a) = \varphi h \quad .$$

Wir werden sehen,daß bei der ratiñalen Approximation diese Bedingung erfüllt ist.

Beispiel 3.2

I)Es seien $u_1,\ldots.u_n \in C(T)$ und $v_1,\ldots.v_m \in C(T)$ jeweils linear unabhängig.

Es sei $\mathcal{N} = \{ (b_1,\ldots.b_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} b_i v_i(t) > o \text{ für alle } t \in T \}$ und $M = \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$.$F:M \to C(T)$ sei durch

$$(a_1,\ldots.a_n,b_1,\ldots.b_m) \longmapsto \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}{\sum_{i=1}^{m} b_i v_i}$$

definiert.

Für $(\alpha, \beta) \in M$ sei $P(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ und $Q(\beta) = \sum_{i=1}^{m} b_i v_i$.

Dann ist

$$T^*(\alpha,\beta) = \operatorname{span}\left(\frac{u_1}{Q(\beta)},\ldots. \frac{u_n}{Q(\beta)}, -\frac{v_1 P(\alpha)}{Q^2(\beta)},\ldots -\frac{v_m P(\alpha)}{Q^2(\beta)} \right).$$

Wir zeigen zunächst,daß F die Darstellbarkeitsbedingung erfüllt.

Es seien $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ und (α,β) aus M.Wir schreiben abkürzend $\bar{P}=P(\bar{\alpha})$, $P=P(\alpha)$, $\bar{Q}=Q(\bar{\beta})$ und $Q=Q(\beta)$.Dann gilt

$$F(\bar{\alpha},\bar{\beta}) - F(\alpha,\beta) = \frac{Q}{\bar{Q}} \left[\frac{\bar{P}Q - P\bar{Q}}{Q^2} \right]$$

und es ist $\frac{\bar{P}Q - P\bar{Q}}{Q^2} \in T^*(\alpha,\beta)$.Also erfüllt F die Darstellbarkeitsbedingung.

Nun sei $(\mathfrak{r},\mathfrak{h})\in M$ und $h\in T^{*}(\mathfrak{r},\mathfrak{h})$. Wir schreiben wieder abkürzend $P=P(\mathfrak{r})$ und $Q=Q(\mathfrak{h})$. Dann hat h die Gestalt $h=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i u_i - \frac{P}{Q^2}\sum_{i=1}^{m}\tilde{b}_i v_i$. Sei nun $\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0$, so daß $\sum_{i=1}^{m}(b_i+\varepsilon\tilde{b}_i)v_i(t)>0$ für alle $t\in T$ ist. Dann sei $\bar{a}_i=a_i+\varepsilon\tilde{a}_i$ und $\bar{b}_i=b_i+\varepsilon\tilde{b}_i$ für i=1,...n bzw. m. Setzen wir $\bar{P}=P(\bar{\mathfrak{r}}),\tilde{P}=P(\tilde{\mathfrak{r}}),\bar{Q}=Q(\bar{\mathfrak{r}})$ und $\tilde{Q}=Q(\tilde{\mathfrak{r}})$ so gilt $(\bar{\mathfrak{r}},\bar{\mathfrak{h}})\in M$ und

$$F(\bar{\mathfrak{r}},\bar{\mathfrak{h}})-F(\mathfrak{r},\mathfrak{h})=\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}-\frac{P}{Q}=\frac{P+\varepsilon\tilde{P}}{Q+\varepsilon\tilde{Q}}-\frac{P}{Q}=$$

$$=\frac{Q}{Q+\varepsilon\tilde{Q}}\left[\frac{P}{Q}+\varepsilon\frac{\tilde{P}}{Q}-\frac{P}{Q}-\varepsilon\frac{P\tilde{Q}}{Q^2}\right]$$

$$=\varepsilon\frac{Q}{Q+\varepsilon\tilde{Q}}\left[\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i u_i-\frac{P}{Q^2}\sum_{i=1}^{m}b_i v_i\right]$$

Damit ist gezeigt, daß ein $(\tilde{\mathfrak{r}},\tilde{\mathfrak{h}})$ M existiert und eine Funktion $\varphi\in C(T)$ mit $\varphi(t)>0$ für alle $t\in T$, so daß $F(\bar{\mathfrak{r}},\bar{\mathfrak{h}})-F(\mathfrak{r},\mathfrak{h})=\varphi h$ gilt.

Also sind die 3 Bedingungen von Satz 3.7 in diesem Fall äquivalent.

Insbesondere folgt aus der Darstellung der Tangentialräume sofort der bekannte Charakterisierunssatz für die beste Approximation bei der rationalen bzw. linearen Approximation, die Spezialisierung von Satz2.3:

Ein Element $v_0\in\mathfrak{F}$ ist genau dann beste Approximation an $f\in C(T)\setminus\mathfrak{F}$, wenn kein $h\in\mathcal{P}+v_0\mathcal{Q}$ existiert, so daß für alle $t\in M_{f-v_0}$ $(f(t)-v_0(t))h(t)>0$ gilt.

Dabei ist $\mathcal{P}=\mathrm{span}(u_1,\ldots u_n)$ und $\mathcal{Q}=\mathrm{span}(v_1,\ldots v_m)$.

Die Äquivalenz der drei Bedingungen von Satz 3.7 im Fall der rationalen Approximation wurde schon von

Brosowski [1,1965] bewiesen.

II) Nun betrachten wir den Fall der rationalen Approximation mit Nebenbedingungen. Es sei $1 \leq k < n+m$ R eine $(k \times n)$-Matrix und S eine $(k \times m)$-Matrix mit reellen Koeffizienten. Die anderen Bezeichnungen seien wie in I).

Nun sei $\tilde{M}$ die Menge aller Paare $(a, h) \in M$ mit

$$R a + S h = \Theta .$$

Setze $\mathcal{N}(a, h) = R a + S h$; o.E. sei $\mathcal{N}$ surjektiv

$$\mathcal{N}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k .$$

Dann ist $\tilde{M}$ eine $(n+m-k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 und $\tilde{F} = F|\tilde{M}$ eine C^1-Abbildung. Wir müssen nun die Tangentialräume $\tilde{T}(a, h)$ bezüglich $\tilde{F}$ berechnen. Mit den Überlegungen aus Problem 2.o erhalten wir, daß $\tilde{T}(a, h)$ aus den Linearkombinationen aus $T(a, h)$ besteht, deren Koeffizienten der Gleichung

$$R \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} \lambda_{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n+m} \end{pmatrix} = \Theta$$

genügen. Dies folgt sofort aus B2.1.2.

Nun ist $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{F}[\tilde{M}]$ nach Satz 3.7 genau dann T-Menge, wenn $\tilde{F}$ die lokale Haarsche Bedingung erfüllt. Denn man überlegt sich leicht, daß $\tilde{F}$ die Darstellbarkeitsbedingung und die Bedingung erfüllt, die die Umkehrung von Satz 3.7 erlaubt, erfüllt.

Für jedes $v \in \tilde{F}[\tilde{M}]$ sei D_v die Teilmenge von $\mathcal{P} + v\mathcal{Q}$, deren Linearkombination mit Koeffizienten gebildet wird, die der Gleichung $R\pi + S\sigma = \Theta$ genügen.

Der Charakterisierungssatz von Gilormini [3,1967] lautet nun:

Ein $v \in \tilde{F}[\tilde{M}]$ ist genau dann besten Approximation an ein f aus C(T), $f \neq v$, wenn es kein $h \in D_v$ gibt, so daß die Ungleichung

$$(f(t)-v(t))h(t) > o$$

für alle Extremalpunkte von f-v gilt.

Nun geht D_v aus dem Tangentialraum von v nur durch die Multiplikation einer jeden Funktion mit der positiven Nennerfunktion von v hervor. Damit erhalten wir den Satz von Gilormini aus unseren Ergebnissen.

Θ

Bemerkung: Die Ergebnisse in Beispiel 3.2 enthalten im besonderen den linearen Fall. Die Äquivalenz der 3 Bedingungen von Satz 3.7 ist hier wohlbekannt. Aber auch in dem Fall mit linearen Nebenbedingungen. Man findet das Ergebnis bei Rivlin/Shapiro [1961].

Wir wenden uns nun der Umkehrung von Satz 3.7 zu.Da wir Gleichungen lokal aufzulösen haben,ergibt sich die folgende Definition ganz natürlich.Wie man sofort sieht sind lineare Funktionenfamilien in dem hier verwendeten Sinn regulär.Wir werden weiter sehen,daß unter gewissen Voraussetzungen eine Verwandtschaft mit unisolventen Familien vorliegt.

Definition:

F heißt in $a \in M$ regulär,falls die Abbildung $F'_{\phi}(\phi(a))$ injektiv ist.Dabei ist (U,ϕ) eine Koordinatenumgebung von a.F heißt regulär,falls F in jedem Punkt regulär ist.

Diese Definition hängt nicht von den speziell gewählten Kordinatenumgebungen ab.

Wir beweisen nun das

Lemma 3.8:

F sei regulär und erfülle die globale Haarsche Bedingung.Es seien $t_1,\ldots t_n$ verschiedene Punkte aus T, $a \in M$ und (U,ϕ) eine Koordinatenumgebung von a. Dann existiert eine kompakte Umgebung K von $\phi(a)$, $K \subset \phi[U]$, so daß folgendes gilt:

Die Abbildung $\Lambda : \phi[U] \to \mathbb{R}^n$ sei durch

$$\Lambda(\tau) = \begin{pmatrix} F(\tau,t_1) \\ \vdots \\ F(\tau,t_n) \end{pmatrix}$$

gegeben.Ist dann V eine Umgebung von $\phi(a)$, $V \subset K$,

dann ist $\Lambda|V$ ein Homöomorphismus von V auf $\Lambda[V]$. Insbesondere ist $\Lambda[V]$ offen.

Beweis:

Da F regulär ist, gibt es eine abgeschlossene Umgebung V_1 von $\phi(a)$, $V_1 \subset \phi[U]$, so daß F_ϕ Homöomorphismus von V_1 auf $F_\phi[V_1] \subset F[U]$ ist. (siehe N.Bourbaki[1967]). (1.5.3). Die Abbildung $\Lambda : V_1 \to \mathbb{R}^n$ ist stetig. Wir zeigen, daß sie auch injektiv ist. Dazu seien $\tau_1, \tau_2 \in V_1$ mit $\Lambda(\tau_1) = \Lambda(\tau_2)$. Für $a_1 = \phi^{-1}(\tau_1)$ und $a_2 = \phi^{-1}(\tau_2)$ ist dann

$$F(a_1, t_i) = F(a_2, t_i) \quad i = 1, \ldots n \ ,$$

und da F die globale Haarsche Bedingung erfüllt ist $F(a_1) = F(a_2)$. Da F_ϕ Homöomorphismus von V_1 auf $F_\phi[V_1]$ ist, folgt $\tau_1 = \tau_2$.

O.E. sei V_1 kompakt. Dann ist $\Lambda|V$ für jede offene Umgebung V von $\phi(a)$, $V \subset V_1$, ein Homöomorphismus von V auf $\Lambda[V]$ und nach dem Brouwerschen Invarianzsatz (siehe Hurewicz/Wallmann[1949]) ist $\Lambda[V]$ offen.

□

Bemerkung: Die Voraussetzungen des vorhergehenden Lemmas seien erfüllt. Es sei $a \in M$ und $t_1, \ldots t_n$ seien verschiedene Punkte aus T. Es sei V eine Umgebung von $\phi(a)$ und habe die in dem Lemma geforderten Eigenschaften. Ist dann $(y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$, so daß

$$\max \left\{ |F(a, t_i) - y_i| : 1 \leq i \leq n \right\}$$

hinreichend klein ist, so existiert ein $\tau \in V$ mit $\Lambda(\tau) = (y_1, \ldots y_n)$. D.h. für $b = \phi^{-1}(\tau)$ gilt $F(b, t_i) = y_i$

für i=1,...n.

Damit erhalten wir den

Satz 3.9:

Es sei T perfekt normal und F regulär. Wenn F die Vorzeichenbedingung und die globale Haarsche Bedingung erfüllt, so auch die lokale Haarsche Bedingung.

Beweis:

Wir nehmen an, es gibt ein $a \in M$ und ein $h \in T^*(a) \setminus \{\Theta\}$ mit n Nullstellen $t_1, \ldots t_n \in T$. Dann sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(t_1) \\ \vdots \\ u_n(t_1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} u_1(t_n) \\ \vdots \\ u_n(t_n) \end{pmatrix}$$

linear abhängig; dabei ist $u_1, \ldots u_n$ eine Basis von $T^*(a)$. D.h. es gibt einen Vektor $(\beta_1, \ldots \beta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}$ so daß

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_j(t_i) = o \qquad (3.9.1)$$

für j=1,...n gilt. Nun sei

$$J^+ := \{ j \in \{1, \ldots n\} : \beta_j > o \}$$

$$J^- := \{ j \in \{1, \ldots n\} : \beta_j < o \}$$

und $M^+ := \{ t_j : j \in J^+ \}$, $M^- := \{ t_j : j \in J^- \}$. Dann ist $\mathfrak{M} := (M^+, M^-)$ tangential extremale T-Signatur für F(a) wegen (3.11.1). Daher gibt es ein $f \in C(T)$ mit $F(a) \in P[f]$. Es sei $(y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta\}$, $\operatorname{sign}(y_i - F(a,t_i)) = \operatorname{sign}(f(t_i) - F(a,t_i))$ für i=1,...n und ferner sei $\max \{ |y_i - F(a,t_i)| : 1 \le i \le n \}$ hinreichend klein.

Es sei f o.E. so gewählt,daß $M_{f-F(a)}=\{ t_j : j\in J^+ \cup J^- \}$ gilt.Dann ist

$$\inf \{ (f(t)-F(a,t))(F(b,t)-F(a,t)) : t\in M_{f-F(a)} \} > 0$$

wobei $b\in M$ so bestimmt ist,daß $F(b,t_i)=y_i$ für $i=1,\ldots n$ gilt.Dies ist ein Widerspruch,da $\mathcal{F}$ eine α-Sonne ist.

□

Zusammenfassen erhalten wir nun den

Satz 3.1o:

Es sei T perfekt normal und F erfülle die Vorzeichenbedingung.Ist F regulär,so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) F erfüllt die lokale Haarsche Bedingung

(ii) $\mathcal{F}$ ist eine T-Menge

(iii) F erfüllt die globale Haarsche Bedingung .

Wie schon erwähnt wurden Untersuchungen dieser Art im linearen Fall von Rice durchgeführt.Im nichtlinearen Fall gibt es ein Kriterium von Krabs[3,197o].Hierzu benötigen wir folgende

Definition:

F erfüllt die Nullstellenbedingung,wenn für alle $a\in M$ $d(a)\geq 1$ ist und jede Differenz $F(b)-F(a)$ höchstens $d(a)$ Nullstellen besitzt oder identisch verschindet.

Dann lautet das Ergebnis von Krabs:Erfüllt F die Vorzeichenbedingung und ist $\mathcal{F}$ eine T-Menge,so erfüllt F die Nullstellenbedingung.Dieses Ergebnis folgt aus unserem

Satz 3.7.Andere notwendige Kriterien findet man im nichtlinearen Fall nicht.Brosowski[3,1968] bewies ein allgemeines hinreichendes Kriterium:Ist die lokale Haarsche Bedingung und die Nullstellenbedingung erfüllt,so ist T-Menge.Dies Ergebnis gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung,daß M eine offene Menge ist.Es verallgemeinert das bekannte Kriterium von Meinardus/Schwedt[1964].
Nun läßt sich aus unserem Satz sofort der folgende Satz für ein Intervall ableiten:

Satz 3.11:

F sei regulär und T=[o,1].Genau dann erfüllt F die Haarsche Bedingung,wenn F die VOrzeichenbedingung erfüllt und $\mathcal{F}$ eine T-Menge ist.

Beweis:

Wir haben nur noch zu zeigen,daß F die Vorzeichenbedingung erfüllt,wenn F die Haarsche Bedingung erfüllt.Dies folgt sofort aber mit Satz 7.5 von Collatz/Krabs[1973].
Die Beweisidee läßt sich ohne Schwierigkeiten auf unseren,etwas allgemeineren Fall übertragen.

□

Untersuchungen im nichtlinearen Fall,wann die Haarsche Bedingung notwendig ist,wurden bisher nicht durchgeführt.
Die Aussage,daß aus der lokalen und globalen Haarschen Bedingung folgt,daß $\mathcal{F}$ eine T-Menge ist,ist bekannt.Die Regularität von F benötigt man nur bei der Umkehrung der Aussage.

Schließlich wollen wir das Lemma 3.8 verschärfen,und wir werden sehen,daß die regulären Funktionenfamilien unisolvent sind,wenn die globale Haarsche Bedingung erfüllt ist.

Lemma 3.12:

F sei regulär und erfülle die globale Haarsche Bedingung.Es seien $t_1,....t_n$ verschiedene Punkte aus T,a$\in$M und (U,ϕ) eine Koordinatenumgebung von a. Weiter sei $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.Dann existiert eine kompakte Umgebung K von $\phi(a)$,$K \subset \phi[U]$,so daß folgendes gilt:

Ist die Abbildung $\Lambda : \phi[U] \to \mathbb{R}^n$ wie in Lemma 3.8 definiert,und ist V eine offene Umgebung von $\phi(a)$, $V \subset K$,dann ist $\Lambda | V$ ein Homöomorphismus von V auf $\Lambda[V]$;insbesondere ist $\Lambda[V]$ offen und für alle $b \in \phi^{-1}[V]$ gilt $\|F(b)-F(a)\| < \varepsilon$.

Beweis:

Man bestimme V_1 wie in Lemma 3.8 .Nun ist

$$V_2 := \{ \tau \in \phi[U] : \|F(\tau)-F(a)\| \leq \varepsilon/2 \}$$

eine abgeschlossene Umgebung von $\phi(a)$.Es sei o.E. $K=V_1 \cap V_2$ kompakt.Wie im Lemma 3.8 zeigt man,daß $\Lambda | V$ für jede offene Umgebung V von $\phi(a)$,$V \subset K$,ein Homöomorphismus von V auf $\Lambda[V]$ ist und $\Lambda[V]$ offen ist. Sei nun $b \in \phi^{-1}[V]$.Dann ist $\phi(b) \in V_1 \cap V_2$,also $\|F(b)-F(a)\| < \varepsilon$.

Satz 3.13:

Sei T=[o,1].F sei regulär und erfülle die globale Haarsche Bedingung.Dann ist F lokal unisolvent und $\tilde{\mathcal{F}}$ ist T-Menge.

Beweis:

Daß F lokal unisolvent ist,ist offensichtlich mit Lemma 3.12 bewiesen.Für diese Funktionenfamilien ist aber das "constant-error-curve-problem" gelöst(siehe Ling/Tornga [1974]) und die Rice'sche Theorie[2,1969] ist anwendbar, d.h. $\tilde{\mathcal{F}}$ ist T-Menge.

□

Nun wollen wir den Fall betrachten,daß eine reguläre Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ von C(T) gegebenist,bezüglich der das Approximationsproblem gestellt ist.Regulär bedeutet hier,daß die Topologie der Mannigfaltigkeit die Relativtopologie von C(T) auf $\mathcal{M}$ ist.Wulbert[2,1971]betrachtet Approximationsprobleme dieser Art.

Zunächst wollen wir das Problem unserer Fragestellung unterordnen.Die Dimension der Mannigfaltigkeit sei $n\in\mathbb{N}$. Zu jedem $v\in\mathcal{M}$ wählen wir eine Karte (U_v,ϕ_v).Es sei $W_v=\phi_v[U_v]\subset\mathbb{R}^n$ und $\tilde{W}_v=W_v\times\{v\}$.Dann sei $M=\bigcup_{v\in\mathcal{M}}\tilde{W}_v$.Diese Vereinigung ist disjunkt.Für alle v wird eine Abbildung $F_v:\tilde{W}_v\to C(T)$ durch $F_v(a,v)=\phi_v^{-1}(a)$ definiert.Dann sei die Abbildung $F:M\to C(T)$ durch die Eigenschaft $F|\tilde{W}_v=F_v$ definiert.In natürlicher Weise ist M eine n-dimensionale

C^1-Mannigfaltigkeit und F eine C^1-Abbildung. Damit gilt satz 3.1o insbesondere für Untermannigfaltigkeiten von C(T). Im Unterschied hierzu besteht der Satz von Wulbert auch in einer Aussage über die Existenz der besten Approximierenden, die wir hier nicht betrachten wollen.

Abschließend wollen wir in diesem Abschnitt noch ein Problem behandeln, das von den vorausgehenden Problemen ziemlich unabhängig ist. Dennoch liegt es nahe, es in unserem Rahmen zu untersuchen.
Es ist bei unserer Problemstellung möglich, daß eine Funktion $v \in \mathfrak{F}$ durch zwei verschiedene Parametrisierungen dargestellt werden kann, deren Tangentialräume unterschiedliche Dimension haben. Es stellt sich die Frage, ob man die Definition der Haarschen Bedingung nicht so verallgemeinern kann, daß man jedem $v \in \mathfrak{F}$ eine natürliche Zahl $\delta(v)$ zuordnet, die nun unabhängig von den Parametrisierungen für v ist, und die die Rolle der Zahlen d(a) für alle Parametrisierungen a für v einnimmt. Es bleibt zu hoffen, daß man den bekannten Eindeutigkeitssatz immer noch beweisen kann. Es gilt der

Satz 3.14:

Wenn F die Nullstellenbedingung und die lokale Haarsche Bedingung erfüllt, und wenn $\mathfrak{F}$ eine α-Sonne ist, dann ist $\mathfrak{F}$ eine T-Menge. Ist $T=[o,1]$, so kann die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ eine α-Sonne ist, wegfallen, wenn

man fordert,daß F die globale Haarsche Bedingung anstelle der Nullstellenbedingung erfüllt.

Zum Beweis siehe Brosowski[3,1968] bzw.Meinardus/Schwedt [1964] im Fall des Intervalls.

Diesen Satz wollen wir in dem oben genannten Sinn verallgemeinern.Dazu benötigen wir folgende

Definition:

F erfüllt die Bedingung H(bzw.H^*),wenn zu jedem $v \in \mathcal{F}$ eine Parametrisierung $a \in M$ existiert,so daß $d(a) \geq 1$ ist,$T^*(a)$ ein Haarscher Raum ist und jede Differenz $\tilde{v}-v$ mit $\tilde{v}, v \in \mathcal{F}$,höchstens d(a) (bzw.d(a)-1) Nullstellen hat.Eine solche Parametrisierung heißt zulässig.

Für $v \in \mathcal{F}$ sei nun

$$\delta(v) := \min \{ d(a) : a \text{ zulässige Parametrisierung f.v} \}.$$

Eine zulässoge Parametrisierung a für v mit $\delta(v)=d(a)$ heißt normal.

Nun gilt der

Satz 3.15:

Wenn F die Bedingung H erfüllt und $\mathcal{F}$ α-Sonne ist, dann ist $\mathcal{F}$ T-Menge.

Beweis:

Wir nehmen an,es gibt ein $f \in C(T)$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen $v_1, v_2 \in \mathcal{F}$.Da $\mathcal{F}$ α-Sonne ist,ist durch

$$\mathfrak{M}_1 := (M^+_{f-v_1} \cap M^+_{f-v_2}, M^-_{f-v_1} \cap M^-_{f-v_2})$$

eine für v_1 extremale T-Signatur nach dem Durchschnittsatz definiert.Nun sei a eine normale Parametrisierung für v_1.Dann ist $\mathfrak{M}_1$ tangential extremal für F(a).Also gibt es d(a)+1 Punkte $t_0, \ldots t_r \in T$ mit r=d(a),so daß $v_2(t_i)-v_1(t_i)=0$ für i=0,...r gilt.

Aber eine Differenz $\tilde{v}-v_1$ mit $\tilde{v}\neq v_1$ kann höchstens $\delta(v)=d(a)$ Nullstellen haben.Also erhalten wir einen Widerspruch.

Bemerkung:Im Fall $T=[o,1]$ kann die Voraussetzung,daß $\mathcal{F}$ α -Sonne ist,wegfallen.Denn wenn F die Bedingung H^* erfüllt,so ist $\mathcal{F}$ schon α -Sonne.

Beweis:Es sei $f\in C(T)$ und $v\in P[f]$,$v\neq f$.Wir nehmen an, es gibt ein $\tilde{v}\in\mathcal{F}$,so daß für alle $t\in M_{f-v}$

$$(f(t)-v(t))(\tilde{v}(t)-v(t))>o \qquad (3.15.1)$$

gilt.Nun gilt $\inf\{(f(t)-v(t))h(t) : t\in M_{f-v}\}\leq o$ für alle $h\in T^*(a)$,wobei a eine normale Parametrisierung für v ist.Wegen (3.15.1) ist dann auch

$$\inf\{(\tilde{v}(t)-v(t))h(t) : t\in M_{f-v}\}\leq o$$

für alle $h\in T^*(a)$.Nun gehe man wie in Satz 7.5 von Collatz/Krabs[1973] vor und zeige,daß $\tilde{v}-v$ $d(a)+1$ Nullstellen hat.Also ist $\tilde{v}=v$.

□

Es gibt von Dunham[2,1971;3,1972] Beispiele dafür, daß dieser Satz mit der Bedingung H(bzw.H^*) wirklich eine Verbesserung ist.Mit dem obigen Satz ist es nun auch möglich,die Beispiele von Dunham mit zusätzlichen Nebenbedingungen zu behandeln.Für seine Beispiele verwendete Dunham einen Satz von Barrar und Loeb[2,197o] .Dort wurde für den Fall,daß M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist und $T=[o,1]$ ist der Satz 3.15 bewiesen.Dort wurden aber andere Methoden ver-

wendet,nämlich die Rice'sche Theorie der varisolventen Funktionensysteme.Das Ergebnis kann man auch mit dem Alternantensatz von Meinardus/Schwedt [1964] beweisen,wie Dunham bemerkt hat.Jedoch erhält man in jedem Fall Ergebnisse nur für die Approximation aif einem kompakten Intervall.

Beispiel 3.3:

Wir geben hierzu ein Beispiel an,das von Dunham [2,1971] behandelt wurde.Eine umfassendere Behandlung solcher Beispiele findet man auch bei Dunham [4,1974].

Es sei $T = [0,1]$ und $M = \{(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_3 > -1\}$.

$F: M \to C[0,1]$ sei durch $F(a_1,a_2,a_3,t) = a_1 + a_2 \ln(1+a_3 t)$ definiert.Man sieht,daß konstante Funktionen aus verschiedene Parametrisierungen haben,deren Tangentialräume unterschiedliche Dimension haben.Setzt man nun $\delta(v)=2$ für eine konstante Funtion $v \in \mathcal{F}$ und $\delta(v)=3$ für eine nicht-konstante Funktion $v \in \mathcal{F}$,so hat F die Eigenschaft H und ist also T-Menge.Der Beweis,daß F die Eigenschaft H hat,wird bei Dunham [,1971] ausgeführt.

§ 4 Tschebyschev-Approximation mit Interpolation

Wie in § 3 sei das Tschebyschev-Approximationsproblem in $C(T)$ bezüglich einer Menge $\mathcal{F} = F[M]$ vorgegeben.

Nun seien $\tilde{t}_1, \ldots \tilde{t}_k$ verschiedene Punkte aus T und $y_1, \ldots y_k \in \mathbb{R}$. Ein neues Approximationsproblem sei bezüglich der Menge

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(\tilde{t}_1, \ldots \tilde{t}_k; y_1, \ldots y_k) = \{ v \in \mathcal{F} : v(\tilde{t}_j) = y_j \quad j=1,..k \}$$

gestellt.

Wenn wir eine C^1-Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ und eine C^1-Abbildung $\tilde{F}$ finden können, so daß $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{F}[\tilde{M}]$ gilt, so ist es möglich, die Resultate aus § 3 anzuwenden.

Dies ist sehr einfach im Fall der linearen bzw. rationalen Approximation. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Beispiel 3.2 I): Es sei

$$R = \begin{pmatrix} u_1(\tilde{t}_1) & \ldots\ldots\ldots & u_n(\tilde{t}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(\tilde{t}_k) & \ldots\ldots\ldots & u_n(\tilde{t}_k) \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} v_1(\tilde{t}_1) & \ldots v_m(\tilde{t}_1) \\ \vdots & \vdots \\ v_1(\tilde{t}_k) & \ldots v_m(\tilde{t}_k) \end{pmatrix}$$

Dann besteht $\tilde{\mathcal{F}}$ aus der Menge aller Funktionen $F(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ aus $\mathcal{F}$, für die $R\mathfrak{a} + S\mathfrak{b} = \Theta$ gilt. Dabei geht $\mathfrak{B}^*$ aus $\mathfrak{S}$ hervor, indem man für $i=1,..k$ die i-te Zeile von S mit y_i multipliziert. Daher wird die Approximation mit Interpolation in diesem Fall auf das Beispiel 3.2 II zurückgeführt und wir erhalten das Ergebnis, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ genau dann T-Menge ist, wenn $\tilde{F}$ die lokale Haarsche Bedingung erfüllt.

Dies ist ein Ergebnis,das Gilormini[2,1967] bewiesen hat. Im allgemeinen Fall wird es nich so einfach sein,eine geeignete Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ zu konstruieren.Wir geben eine hinreichende Bedingung an,wann dies möglich ist.Diese Voraussetzung wird auch hinreichend dafür sein,daß $\tilde{\mathcal{F}}$ bezüglich einer Teilmenge von C(T) eine T-Menge ist.Diese Eigenschaft wollen wir zunächst etwas genauer untersuchen. In § 3 hatten wir V-Systeme eingeführt.Dabei hing die Definition eines V-Systems von der Menge $\mathcal{F}$ ab,bezüglich der das Approximationsproblem gestellt war.Da wir in diesem Abschnitt zwei Approximationsprobleme vorliegen haben, das bezüglich $\mathcal{F}$ und jenes bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$,so nennen wir zur Unterscheidung V-Systeme bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$ interpolierende V-Systeme;d.h. ein interpolierendes V-System bezüglich v ist ein Paar disjunkter,abgeschlossener Teilmengen von T mit $V_1 \cup V_2 \neq \emptyset$ und

$$V_1 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t) - v(t) > o \} \quad V_2 \subset \{ t \in T : \tilde{v}(t) - v(t) < o \}$$

für ein geeignetes $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Jedem $a \in \tilde{M}$ wird der folgende Teilraum von C(T) zugeordnet:

$$\tilde{T}^*(a) = \{ h \in T^*(a) : h(\tilde{t}_j) = o \quad j=1,..k \} \quad .$$

Diese Teilräume werden die Rolle der Tangentialräume übernehmen,die wir solange nicht definieren können,wie $\tilde{M}$ keine Mannigfaltigkeit ist.

Definition:

F erfüllt die erweiterte Vorzeichenbedingung,falls zu jedem $v \in \tilde{\mathcal{F}}$ und zu jedem interpolierenden V-System bezüg-

lich v und zu jeder Parametrisierung $a \in M$ für v ein h aus $\tilde{T}^*(a)$ existiert mit

(i) $h(t) > o$ für alle $t \in V_1$

(ii) $h(t) < o$ für alle $t \in V_2$.

Setzen wir $\tilde{d}(a) = \dim \tilde{T}^*(a)$, so gilt für alle $a \in \tilde{M}$ mit

$$\tilde{M} = \{ a \in M : F(a) \in \tilde{\mathcal{F}} \}$$

$\tilde{d}(a) \geq 1$, wenn F die erweitere Vorzeichenbedingung erfüllt, wenn wir nur die Voraussetzung machen, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ mindesten 2 Elemente enthält. Dies soll von nun an gelten.

Im allgemeinen wird $\tilde{\mathcal{F}}$ keine T-Menge sein. Wir sehen dies aus dem zuvor behandelten Fall der rationalen Approximation. Daher die

Definition:

$\tilde{\mathcal{F}}$ heißt eine relative T-Menge, wenn jedes $f \in \tilde{C}(T)$ höchstens eine beste Approximation bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$ hat. Dabei ist

$$\tilde{C}(T) = \{ f \in C(T) : f(t_j) = y_j \quad j=1,..k \} .$$

Unser Ziel ist es, für relative T-Mengen eine analoge Theorie wie für T-Mengen aufzubauen. Dies ist zumindest für den linearen Fall möglich (siehe Deutsch [1968]).

Wir erhalten jetzt in Analogie zu Satz 3.4 das

Lemma 4.1:

Es erfülle F die erweiterte Vorzeichenbedingung. Es seien $F(a), F(b) \in \tilde{\mathcal{F}}$, $F(a) \neq F(b)$, $\tilde{r} = \tilde{d}(a)$ und $F(b) - F(a)$

habe $\tilde{r}$ Nullstellen $t_1,\dots t_{\tilde{r}} \in T\setminus\{\tilde{t}_1,\dots\tilde{t}_k\}$ .Dann existiert ein $f\in C(T)$ mit $F(a),F(b)\in P[f]$ und für alle $i=1,\dots.k$ gilt $f(\tilde{t}_i)=y_i$.

Ist T perfekt normal,so kann man erreichen,daß $M_{f-F(b)} \subset \{t_1,\dots t_{\tilde{r}}\}$ gilt.

Beweis:

Es sei $u_1,\dots u_{\tilde{r}}$ eine Basis von $\tilde{T}^*(a)$.Ferner sei die Funktion $G\in C(T)$ durch $G(t)=|F(b,t)-F(a,t)|$ für alle $t\in T$ definiert;es sei $\alpha = \|G\|$.Nun sei $t_o\in T$ mit $F(a,t_o) \neq F(b,t_o)$.Dann existiert ein Vektor $(\beta_o,..\beta_{\tilde{r}})\in R^{\tilde{r}}\setminus\{o\}$, so daß

$$\sum_{i=o}^{\tilde{r}} \beta_i u_j(t_i)=o \qquad (4.1.1)$$

für $j=1....\tilde{r}$ gilt.Wir unterscheiden wieder 2 Fälle.

Wenn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t_1) \end{pmatrix} \quad ,\dots\dots \quad \begin{pmatrix} u_1(t_{\tilde{r}}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t_{\tilde{r}}) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind,so sprechen wir von Fall 1, andernfalls von Fall 2.

Im Fall 1 ist $\beta_o \neq o$ und es sei o.E.

$$\operatorname{sign}\beta_o = \eta := \operatorname{sign}(F(b,t_o)-F(a,t_o)) \quad .$$

Im Fall 2 sei o.E. $\beta_o = o$.

Es sei $J := \{ j\in\{o,\dots\tilde{r}\} : \beta_j \neq o \}$.

Nun sei $g\in C(T)$, $\|g\|=1$,mit

$$g(t_j)=\operatorname{sign}\beta_j \quad \text{für alle } j\in J$$

und

$$g(\tilde{t}_j)=o \quad \text{für } i=1,..k \quad .$$

(Ist T perfekt normal,so sei $|g(t)|<1$ für alle ande-

ren $t \in T$.)

Die Funktion $f \in C(T)$ sei durch

$$f(t) = g(t)(\alpha - G(t)) + F(b,t)$$

für alle $t \in T$ definiert. Da $g(t_i) = o$ für $i = 1, \ldots k$ gilt, gilt $f(\tilde{t}_i) = F(b, \tilde{t}_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots k$.

Für alle $t \in T$ ist

$$|f(t) - F(a,t)| \leq |g(t)| \left(\alpha - G(t)\right) + |F(b,t) - F(a,t)|$$
$$\leq \alpha - G(t) + G(t) = \alpha .$$

Daher ist $\|f - F(a)\| \leq \alpha$. Es ist sogar $\|f - F(a)\| = \alpha$.

Denn im Fall 1 ist $o \in J$ und daher ist

$$f(t_o) - F(a,t_o) = g(t_o)(\alpha - G(t_o)) + F(b,t_o) - F(a,t_o)$$
$$= \eta\alpha - \eta G(t_o) + \eta G(t_o) = \eta\alpha .$$

Im Fall 2 ist für ein $j \in \{1, \ldots \tilde{r}\}$ $\beta_j \neq o$ und für dieses j gilt dann $f(t_j) - F(a,t_j) = g(t_j)\alpha$.

Insbesondere ist die Menge $\{t_j : j \in J\}$ in $M_{f-F(a)}$ enthalten.

Wegen (4.1.1) gilt für alle $h \in \tilde{T}^*(a)$ $\sum_{j \in J} \beta_j h(t_j) = 0$. Also gilt für alle $h \in \tilde{T}^*(a)$ auch

$$\inf \{(f(t_j) - F(a,t_j))h(t_j) : j \in J\} \leq o .$$

Denn für jedes $j \in J$ ist

$$f(t_j) - F(a,t_j) = g(t_j)(\alpha - G(t_j)) + F(b,t_j) - F(a,t_j)$$
$$= \operatorname{sign} \beta_j (\alpha - G(t_j)) + F(b,t_j) - F(a,t_j)$$
$$= \begin{cases} \eta\alpha - \eta G(t_o) + \eta G(t_o) = \eta\alpha & \text{im Fall 1, } j = o \\ \alpha \operatorname{sign} \beta_j & \text{im Fall 1, } j \neq o \\ \alpha \operatorname{sign} \beta_j & \text{im Fall 2} \end{cases}$$

Somit gilt für alle $h \in \tilde{T}^*(a)$

$$\inf \{(f(t_j) - F(a,t_j))h(t_j) : j \in J\}$$

$$= \inf \{ h(t_j)\operatorname{sign}\beta_j : j\in J \} \leq o \quad .$$

So haben wir auch

$$\inf \{ (f(t)-F(a,t))h(t) \quad : t\in M_{f-F(a)} \} \leq o$$

für alle $h\in\tilde{T}^*(a)$.

Wir nehmen nun an,es gibt ein $v\in\tilde{\mathcal{F}}$ mit

$$\inf \{ (f(t)-F(a,t))(v(t)-F(a,t)) : t\in M_{f-F(a)} \} > o \quad .$$

Dann ist $(M^+_{f-F(a)}, M^-_{f-F(a)})$ ein interpolierendes V-System bezüglich F(a).Da F die erweiterte Vorzeichenbedingung erfüllt,existiert ein $h\in\tilde{T}^*(a)$ mit

$$\inf \{ (f(t)-F(a,t))h(t) : t\in M_{f-F(a)} \} > o \quad .$$

Dies ist ein Widerspruch.

Also ist $F(a)\in P[f]$ nach dem Kolmogoroff-Kriterium.

Andererseits gilt auch $\|f-F(b)\| \leq \alpha$ .Also ist auch F(b) beste Approximation an f.

(Tst T perfekt normal,so gilt $M_{f-F(b)} \subset \{t_1,\ldots t_{\tilde{r}}\}$.)

□

Definition:

F erfüllt die erweiterte globale Haarsche Bedingung, wenn für $a,b\in\tilde{M}$ folgendes gilt:Ist $F(a)\neq F(b)$,so hat $F(b)-F(a)$ von $\tilde{t}_1,\ldots\tilde{t}_k$ abgesehen höchstens $\tilde{d}(a)-1$ Nullstellen.

F erfüllt die erweiterte lokale Haarsche Bedingung, wenn für jedes $a\in\tilde{M}$ $\tilde{d}(a)\geq 1$ ist und jedes $h\in\tilde{T}^*(a)$ von $\tilde{t}_1,\ldots\tilde{t}_k$ abgesehen höchstens $\tilde{d}(a)-1$ Nullstellen hat.

Aus unseren Überlegungen in Beispiel 3.2 folgt für die rationale Approximation mit Interpolationsbedingungen:

Die erweiterte globale und lokale Haarsche Bedingung sind äquivalent. Ist für das Problem ohne Interpolationsforderung die globale (lokale) Haarsche Bedingung erfüllt, so ist auch die erweiterte globale (lokale) Haarsche Bedingung erfüllt.

In Analogie zu Satz 3.5 folgt nun aus Lemma 4.1 der

Satz 4.2:

F erfülle die erweiterte Vorzeichenbedingung und $\tilde{\mathcal{F}}$ sei relative T-Menge. Dann erfüllt F die erweiterte globale Haarsche Bedingung.

Es wäre nun schön, wenn wir einen zu Satz 3.6 analogen Satz beweisen könnten, nämlich "F erfüllt die erweiterte Vorzeichenbedingung und F erfüllt die erweiterte lokale Haarsche Bedingung $\Rightarrow$ $\tilde{\mathcal{F}}$ ist relative T-Menge". Dies ist aber mit unseren Methoden nicht möglich. Die Übertragung des Beweises von Satz 3.6 scheitert daran, daß wir die Aussage "Ist $f \in \tilde{C}(T)$ und ist F(a) beste Approximation an f bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$, so gilt für alle $h \in \tilde{T}^{\blacktriangledown}(a)$ $\|f-F(a)\| \leq \|f-F(a)-h\|$ " nicht beweisen können.; deshalb nicht, weil $\tilde{T}^{\blacktriangledown}(a)$ kein Tangentialraum in unserem in § 2 entwickelten Sinn ist. Wir können aber eine hinreichende Bedingung angeben, wenn die Räume

$\tilde{T}(a)$ Tangentialräume sind.Dies ist dann der Fall, wenn wir $\tilde{M}$ zu einer Mannigfaltigkeit machen können. Wir wollen die Überlegungen aus Problem 2.o verwenden.Die Abbildung $\mathcal{N}:M\to\mathbb{R}^k$ sei durch

$$\mathcal{N}(a) = \begin{pmatrix} F(a,\tilde{t}_1)-y_1 \\ \vdots \\ F(a,\tilde{t}_k)-y_k \end{pmatrix}$$

definiert.Die Abbildung $\mathcal{N}_1:C(T)\to\mathbb{R}^k$ sei durch

$$\mathcal{N}_1(g) = \begin{pmatrix} g(\tilde{t}_1) \\ \vdots \\ g(\tilde{t}_k) \end{pmatrix}$$

definiert.Dann ist $\mathcal{N}$ die Hintereinanderschaltung der Abbildungen $\mathcal{N}_1$ und F.Also ist $\mathcal{N}$ eine C^1-Abbildung auf M.

Es sei nun $a\in\tilde{M}$ und (U,ϕ) ein Koordinatensystem um a. Dann gilt die Formel

$$\mathcal{N}'_\phi(\phi(a))\cdot\xi = \mathcal{N}'_1(F(a))\ F'_\phi(\phi(a))\cdot\xi$$

für alle $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Wir haben nachzuprüfen,ob $\mathcal{N}'_\phi(\phi(a))\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ surjektiv ist.Für i=1,...n sei ε_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$,und es sei $h_i=F'_\phi(\phi(a))\cdot\varepsilon_i$.Dann wird $\mathcal{N}'_\phi(\phi(a))$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} h_1(\tilde{t}_1) & \cdots & h_n(\tilde{t}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_1(\tilde{t}_k) & \cdots & h_n(\tilde{t}_k) \end{pmatrix}$$

repräsentiert.

Dann ist mit den Bezeichnungen aus Problem 2.o $\alpha_{ij}=h_i(\tilde{t}_j)$ für i=1,...n und j=1,....M.Es sei nun o.E. $h_1,\ldots h_r$ eine Basis von $T^*(a)$,r=d(a).Dann existiert eine (kxk)-Untermatrix von

$$\begin{pmatrix} h_1(\tilde{t}_1) & . & . & . & h_r(\tilde{t}_1) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ h_1(\tilde{t}_k) & . & . & . & h_r(\tilde{t}_k) \end{pmatrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante,da F die lokale Haarsche Bedingung erfüllt,wenn wir nur voraussetzen,daß es eine Zahl $l\in\mathbb{N}$ gibt,so daß für alle $a\in\tilde{M}$ $d(a)\geq l>k$ gilt.Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2.2 sei nun o.E.

$$A = \begin{pmatrix} h_1(\tilde{t}_1) & . & . & . & h_k(\tilde{t}_1) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ h_1(\tilde{t}_k) & . & . & . & h_k(\tilde{t}_k) \end{pmatrix} .$$

Nun ist $\tilde{T}^*(a)=F'_\phi(\phi(a))[\mathcal{L}]$,wobei $\mathcal{L}$ ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist,und ein Vektor $(\lambda_1,\ldots\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ genau dann in $\mathcal{L}$ liegt,wenn

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_k \end{pmatrix} = -\bar{A}^1B\begin{pmatrix} \lambda_{k+1} \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

gilt.Also ist ein $h\in T^*(a)$ genau dann aus $\tilde{T}^*(a)$,wenn die Koeffizienten bezüglich $h_1,\ldots h_n$ in $\mathcal{L}$ liegen. Dies ist wegen (*) genau dann der Fall,wenn $h(\tilde{t}_i)=o$ für i=1,..k gilt.Damit haben wir das

Satz 4.3:

F erfülle die lokale Haarsche Bedingung.Es existiere eine natürliche Zahl $l > k$,so daß für alle $a \in \tilde{M}$ $d(a) \geq l$ gilt.Dann ist $\tilde{M}$ in kanonischer Weise eine C^1-Mannigfaltigkeit der Dimension n-k und $\tilde{F}=F|\tilde{M}$ ist eine C^1-Abbildung.Die zu Beginn des Abschnitts definierten Räume $\tilde{T}^*(a)$ sind für $a \in \tilde{M}$ die Tangentialräume unter der Abbildung $\tilde{F}$.Ferner erfüllt F die erweiterte lokale Haarsche Bedingung.Für alle $a \in \tilde{M}$ gilt $\tilde{d}(a)=d(a)-k$.

Beweis:

Die wesentlichen Teile haben wir schon gezeigt.Daß F die erweiterte lokale Haarsche Bedingung erfüllt ist trivial mit dem folgenden.
Sei nun $a \in \tilde{M}$.Zu $\tilde{t}_1,\ldots\tilde{t}_k$ füge man Punkte $\tilde{t}_{k+1},\ldots\tilde{t}_{d(a)}$ aus T hinzu,so daß alle Punkte verschieden sind.Da F die lokale Haarsche Bedingung erfüllt,gibt es Funktionen $h_1,\ldots h_{d(a)} \in T^*(a)$ mit $h_i(t_j)=\delta_{ij}$ für $i=1,..\tilde{d}(a)$ und $j=1,..d(a)$.Die Funktionen $h_{k+1},\ldots h_{d(a)}$ sind aus $\tilde{T}^*(a)$ und linear unabhängig.Sei $h \in \tilde{T}^*(a)$.Setze

$$\hat{h}=h(t_{k+1})h_{k+1}+\cdots+h(t_{d(a)})h_{d(a)}.$$

Dann hat $\hat{h}$-h die Nullstellen $\tilde{t}_1,\ldots\tilde{t}_{d(a)}$,also ist identisch gleich o.Da h beliebig war,erzeugt $h_{k+1},\ldots h_{d(a)}$ den linearen Raum $\tilde{T}^*(a)$.

Θ

Mit diesem Satz können wir nun viele Fragestellungen

auf die in § 3 entwickelte Theorie zurückführen, und wir können auf diese Weise Resultate wie bei Gislason und Loeb[1972] erhalten,jedoch in einem allgemeineren Rahmen.

Es ist noch zu bemerken,daß die Voraussetzung von Satz 4.3 abgeschwächt werden kann.Man braucht nur, daß für alle $a\in\tilde{M}$ $T^{*}(a)$ ein Haarscher Raum ist,und daß es eine natürliche Zahl $l>k$ gibt,so daß für alle $a\in\tilde{M}$ $d(a)\geq l$ gilt.

Mit Satz 4.3 wollen wir nun ein hinreichendes Kriterium angeben,wann $\tilde{\mathcal{F}}$ eine relative T-Menge ist. Setzen wir etwa voraus,daß F die Darstellbarkeitsbedingung erfüllt,so wird diese auch von $\tilde{F}$ erfüllt, wenn wir die Voraussetzungen von Satz 4.3 machen. Im allgemeinen wird aber nach den Ergebnissen von § 3 $\tilde{\mathcal{F}}$ keine T-Menge sein.Denn für die rationale Approximation gilt zumindest,daß $\tilde{\mathcal{F}}$ genau dann T-Menge ist,wenn $\tilde{F}$ die lokale Haarsche Bedingung erfüllt.Da aber F die lokale Haarsche Bedingung erfüllt,wird dies im allgemeinen nicht für $\tilde{F}$ gelten. Daher ist es nicht verwunderlich,daß man aus diesen Vorausetzungen lediglich ableiten kann,daß $\tilde{\mathcal{F}}$ relative T-Menge ist.

Satz 4.4:

Die Vorausetzungen von Satz 4.3 seien erfüllt. Ferner erfülle F die Darstellbarkeitsbedingung.

Dann ist $\tilde{\mathcal{F}}$ relative T-Menge.

Beweis:

Wir zeigen zunächst,daß $\tilde{\mathcal{F}}$ α -Sonne ist.Es sei also $f\in C(T)$ und $v_o \in \tilde{\mathcal{F}}$ beste Approximation an f bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$ .Wir nehmen an,es gibt ein $v\in\tilde{\mathcal{F}}$ mit

$$\inf\{(f(t)-v_o(t))(v(t)-v_o(t)) : t\in M_{f-v_o}\} > o.$$

Da F die Darstellbarkeitsbedingung erfüllt,gibt es ein $h\in T^*(a)$ so daß für eine geeignete Funktion $\varphi\in C(T)$ mit $\varphi(t) > o$ für alle $t\in T$ gilt

$$v-v_o = \varphi h \quad ;$$

dabei ist a eine Parametrisierung für v_o.Also ist $h\in\tilde{T}^*(a)$ und es gilt

$$\inf\{(f(t)-v_o(t))h(t) : t\in M_{f-v_o}\} > o \ ;$$

dies ist ein Widerspruch da v_o beste Approximation an f bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}$ ist.

Damit ist $\tilde{\mathcal{F}}$ α -Sonne.Wir nehmen an,es gibt ein $f\in\tilde{C}(T)$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen v_o, v_1.Nach dem Durchschnittssatz gilt dann,daß durch $\mathfrak{M}_1 := (M^+_{f-v_o}\cap M^+_{f-v_1}, M^-_{f-v_o}\cap M^-_{f-v_1})$ eine

für v_o extremale T-Signatur definiert ist.Ist nun a eine Parametrisierung für v_o,so ist $\mathfrak{M}_1$ tangential extremal für F(a).Daher enthält $M_1^+ \cup M_1^-$ mindestens d(a)-k+1 Punkte,da F die lokale Haarsche Bedingung erfüllt.Somit gibt es $\tilde{r}=\tilde{d}(a)=d(a)-k$ Punkte $t_1,\dots t_{\tilde{r}}$ aus $T\setminus\{\tilde{t}_1,\dots\tilde{t}_k\}$,so daß für $i=1,\dots\tilde{r}$ gilt

$$v(t_i)-F(a,t_i)=o \quad .$$

Da F insbesondere auch die erweiterte Vorzeichenbedingung erfüllt,ist es möglich,Lemma 4.1 anzuwenden. Also gibt es ein $f_1 \in \tilde{C}(T)$ mit $v_o, v_1 \in P[f]$ und mit der Eigenschaft,daß $M_{f_1-v_1}$ in $\{t_1,\ldots.t_{\tilde{r}}\}$ enthalten ist.Eine weitere Anwendung des Durchschnittssatzes ergibt,daß die durch

$$\mathfrak{M}_2 := (M^+_{f_1-v_o} \cap M^+_{f_1-v_1}, M^-_{f_1-v_o} \cap M^-_{f_1-v_1})$$

definierte T-Signatur extremal für v_o ist.Also ist $\mathfrak{M}_2$ auch tangential extremal für F(a).Aber $M^+_2 \cup M^-_2$ ist in $\{t_1,..t_{\tilde{r}}\}$ enthalten,enthält also höchstens d(a)-k Punkte.Dies ist ein Widerspruch.

Θ

Dieser Satz gilt ebenso auch unter der abgeschwächten Voraussetzung von Satz 4.3.

Beispiel 4.1:

Wir wenden uns erneut der rationalen Approximation mit Interpolationsbedingungen zu.In diesem Fall gibt es immer eine Differenzierbarkeitstruktur auf $\tilde{M}$,so daß $\tilde{F}=F|\tilde{M}$ eine C^1-Abbildung ist.Die Tangentialräume sind dann die Räume $\tilde{T}(a)$,$a \in \tilde{M}$,wie wir in Beispiel 3.2 nachgewiesen haben.Wir wollen nun die folgende Implikation beweisen:

Wenn F die erweiterte lokale Haarsche Bedingung erfüllt,so ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ relative T-Menge.

Zunächst ist klar,daß unter den gegebenen Voraussetzungen $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine α-Sonne ist.Dies folgt wie in

Satz 4.4.Wir nehmen an,es gibt ein $f \in \tilde{C}(T)$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen v_o, v_1.Es sei a eine Parametrisierung für v_o.Dann erhalten wir wie in Satz 4.4 eine für F(a) extremale T-Signatur.Wir nehmen an,daß $M_1^+ \cup M_1^-$ höchstens $\tilde{d}(a)$ Punkte enthält.Enthält $M_1^+ \cup M_1^-$ weniger als $\tilde{d}(a)$ Punkte,so ergänze man diese auf $\tilde{d}(a)$ Punkte mit Punkten aus $T \setminus \{\tilde{t}_1, \ldots \tilde{t}_k\}$ .Sei $\tilde{r}=\tilde{d}(a)$.So erhält man Punkte $t_1, \ldots t_{\tilde{r}}$ aus $T \setminus \{\tilde{t}_1, \ldots \tilde{t}_k\}$ mit $M_1^+ \cup M_1^- \subset \{t_1, \ldots t_{\tilde{r}}\}$. Es sei $h_1, \ldots h_{\tilde{r}}$ eine Basis von $\tilde{T}(a)$.Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} h_1(t_1) & \cdots & h_{\tilde{r}}(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_1(t_{\tilde{r}}) & \cdots & h_{\tilde{r}}(t_{\tilde{r}}) \end{pmatrix} \neq 0 \ ,$$

denn andernfalls gibt es ein $h \in \tilde{T}^*(a)$ mit $\tilde{d}(a)$ Nullstellen,die alle von $\tilde{t}_1, \ldots \tilde{t}_k$ verschieden sind.Dies ist nicht möglich,da F die erweiterte lokale Haarsche Bedingung erfüllt.Also gibt es ein $h \in \tilde{T}^*(a)$ mit $h(t) = \varepsilon \mathfrak{M}_1(t)$ für alle $t \in M_1^+ \cup M_1^-$.Aber $\mathfrak{M}_1$ ist tangential extremal für F(a).Widerspruch.Somit enthält $M_1^+ \cup M_1^-$ mindestens d(a)+1 Punkte.Wir können den Beweis nun wie in Satz 4.4 fortsetzen und erhalten ein $f_1 \in \tilde{C}(T)$ mit v_o und v_1 als besten Approximationen und dem gleichen Widerspruch wie in Satz 4.4.Wir wenden dabei wieder Lemma 4.1 an und berücksichtigen, daß unter der Voraussetzung auch die erweiterte Vorzeichenbedingung erfüllt ist.

Da nun genau dann die erweiterte lokale Haarsche Bedingung erfüllt ist,wenn die erweiterte globale Haarsche Bedingung erfüllt ist,erhalten wir das folgende Ergebnis für die rationale Approximattion:

Genau dann ist $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ relative T-Menge,wenn die erweiterte lokale Haarsche Bedingung erfüllt ist.

Berücksichtigt man,daß das Erfülltsein der lokalen Haarschen Bedingung das Erfülltsein der erweiterten lokalen Haarschen Bedingung impliziert,so erhält man als Spezialfall hieraus die bekannte Einedutigkeitsaussage im linearen Fall:

Ist die lokale Haarsche Bedingung erfüllt,so ist $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ relative T-Menge.

Das Ergebnis stammt von Paszkowski [1955];siehe auch Deutsch[1968].Deutsch bemerkt in seiner Arbeit,daß es eine vollständige Analogie zwischen der klassischen Tschebyschev-Approximation und der mit Interpolationsforderungen gibt.Aus unseren Überlegungungen sehen wir,daß sich diese Analogie auch im nichtlinearen Fall fortsetzt.

Die bislang allgemeinste Theorie für die Approximation mit Interpolationsbedingungen ist die,welche von Gislason und Loeb[1972] entwickelt wurde.Wir haben gezeigt, daß sie sich unserer Theorie unterordnet.

Untersuchungen darüber,welche Bedingungen notwendig erfüllt sind,wenn $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}$ eine relative T-Menge ist,wurden bisher nicht angestellt.

In diesem Zusammenhang wie auch in § 3 verzichten wir auf die Ableitung der Alternantensätze im Falle der Approximation auf einem Intervall.Diese Sätze charakterisieren die Tangentialapproximationen.Die Ableitung dieser Sätze ist auf die bekannte Art möglich;ihre Darstellung hier würde jedoch keine neuen Einsichten in das Problem vermitteln.

Auf die Ableitung eines Charakterisierungssatzes für die besten Approximierenden,also eine Spezialisierung von Satz 2.3 auf den hier vorliegenden Fall,haben wir verzichtet.Hoffmann[1969] führt dies in seiner Arbeit durch.Dort werden aber keine Fragen,die die Eindeutigkeit der besten Approximiernden betreffen,behandelt.

§ 5 L_1-Approximation

,In diesem Abschnitt wollen wir Approximationstheorie in dem Raum $C[0,1]$ betreiben,dem Raum der auf $[0,1]$ definierten,reellwertigen Funktionen,versehen mit der L_1-Norm.Da wir Eindeutigkeitsfragen untersuchen wollen, ist es nicht sinnvoll,den Raum $L_1[0,1]$ zu betrachten,da der bekannte Satz von Krein besagt,daß im linearen Fall die beste Approximation nicht eindeutig bestimmt ist.
Es sei V eine nichtleere Teilmenge von $C[0,1]$,die nicht notwendig das Bild einer C^1-Abbildung von einer C^1-Mannigfaltigkeit ist.
Im linearen Fall gilt als hinreichendes Kriterium dafür, daß eine T-Menge vorliegt,der bekannte Satz von Jackson, der von Ptak[1958] und Singer[1960] weiter untersucht wurde.Die lineare Approximation in diesem Raum wurde dann von Cheney/Wulbert[1969] und Henze[1970] weiterverfolgt.
Wichtig für die Überlegungen im nichtlinearen Fall ist das folgende Lemma,das bei Henze[1970] bewiesen wird:

Lemma 5.1:

Es sei V eine α-Sonne.$f \in C[0,1]$ habe zwei beste Appoximationen $v_0, v_1 \in V$.Dann gilt für alle $t \in [0,1]$

$$(f(t)-v_0(t))(f(t)-v_1(t)) \geq 0 \quad .$$

Wir wollen nun den Begriff der Signatur einführen.Wir sehen,daß durch eine geeignete Definition eine paralle-Situation zur Tschebyschev-Approximation eintritt.Ziel ist,

das Kolmogoroff-Kriterium anders zu formuliern.Eine L_1-Signatur sei ein Paar (U^+,U^-) von disjunkten,offenen Teilmengen von$[o,1]$ mit $U^+ \cup U^- \neq \emptyset$.Wir schreiben $\mathfrak{U}=(U^+,U^-)$.Zu $\mathfrak{U}$ sei die folgende Funktion definiert

$$\varepsilon_{\mathfrak{U}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t\in U^+ \\ -1 & \text{falls } t\in U^- \end{cases} .$$

Ist $v_o \in V$,so heißt die L_1-Signatur extremal für v_o,wenn für alle $v\in V$ gilt

$$\int_{U^+ \cup U^-} \varepsilon_{\mathfrak{U}}(v-v_o)\,d\mu \leq \int_{Z(\mathfrak{U})} |v-v_o|\,d\mu \quad ;$$

dabei ist $Z(\mathfrak{U})=[o,1] \setminus (U^+ \cup U^-)$.

Jedem $f\in C[o,1] \setminus \{\Theta\}$ wird die L_1-Signatur $\mathfrak{U}_f=(U_f^+,U_f^-)$ mit $U_f^+=\{ t\in[o,1] : f(t)>o\}$ und $U_f^-=\{t\in[o,1]:f(t)<o\}$ zugeordnet.Anstelle von $Z(\mathfrak{U}_f)$ schreiben wir kürzer $Z(f)$.

Für $f\in C[o,1]$ sei ferner definiert:

$$\operatorname{signf}(t)=\begin{cases} 1 & \text{falls } t\in U_f^+ \\ -1 & \text{falls } t\in U_f^- \\ o & \text{falls } t\in Z(f) \end{cases} .$$

Berücksichtigt man die Darstellung der Extremalfunktionale in dem vorliegenden Raum,so lautet das Kolmogoroff-Kriterium:

Ist $f\in C[o,1]$ und $v_o\in V, v_o\neq f$,und ist $\mathfrak{U}_{f-v_o}$ extremal für v_o,so ist $v_o\in P[f]$.

Nun gilt der dem Satz 3.13 von Brosowski[3,1968] entsprechende Satz,dort für die Tschebyschev-Approximation und hier für die L_1-Approximation über Signaturen

Satz 5.2:

Ist V T-Menge, so gilt für alle $v_o \in V$: Ist $\mathfrak{N}$ eine für v_o extremale L_1-Signatur, so existiert kein $v \in V, v \neq v_o$ mit

(i) $Z(v-v_o) \supset Z(\mathfrak{N})$

und

(ii) $\int_{U^+} (v-v_o)d\mu - \int_{U^-} (v-v_o)d\mu = o.$

Beweis:

Es sei $v_o \in V$ und $\mathfrak{N} = (U^+, U^-)$ eine für v_o extremale L_1-Signatur. Nach einem Satz von Arold [1968] existiert dann ein $f \in C[o,1]$ mit $\operatorname{sign}(f-v_o)(t) = \varepsilon_{\mathfrak{N}}(t)$ für alle $t \in U^+ \cup U^-$ und $\operatorname{sign}(f-v_o)(t) = o$ für alle $t \in Z(\mathfrak{N})$. Wir nehmen an, es gibt ein $v_1 \in V$, das die beiden Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Für alle $t \in [o,1]$ sei die folgende Funktion definiert: $h(t) = |v_1(t)-v_o(t)| \operatorname{sign}(f-v_o)(t)$.

Unstetigkeitspunkte von h könnten die Punkte aus $Z(\mathfrak{N})$ sein. Aber $Z(\mathfrak{N})$ ist in $Z(v_1-v_o)$ enthalten. Daher ist h stetig und es gilt $Z(h) = Z(v_1-v_o)$. Sei nun $f^* = h+v_o \in C[o,1]$. Für alle $v \in V$ gilt

$$\int (v-v_o)\operatorname{sign}(f^*-v_o)d\mu = \int (v-v_o)\operatorname{sign}(h)d\mu =$$

$$= \int_{\{h \neq o\}} (v-v_o)\operatorname{sign}(h)d\mu = \int_{\{h \neq o\}} (v-v_o)\operatorname{sign}(f-v_o)d\mu$$

$$= \int (v-v_o)\operatorname{sign}(f-v_o)d\mu - \int_{Z(h)} (v-v_o)\operatorname{sign}(f-v_o)d\mu$$

$$= \int_{U^+} (v-v_o)d\mu - \int_{U^-} (v-v_o)d\mu$$

$$- \int_{Z(h)} (v-v_o)\operatorname{sign}(f-v_o)d\mu .$$

Nun ist $\mathfrak{N}$ extremal für v_o. Daher kann man weiter abschät-

Man erhält $\int (v-v_o)\,\mathrm{sign}(f^*-v_o)\,d\mu \leq$

$$\int_{Z(\mathfrak{N})} |v-v_o|\,d\mu - \int_{Z(h)} (v-v_o)\,\mathrm{sign}(f-v_o)\,d\mu =$$

$$\int_{Z(\mathfrak{N})} |v-v_o|\,d\mu - \int_{Z(h)\setminus Z(\mathfrak{N})} (v-v_o)\,\mathrm{sign}(f-v_o)\,d\mu \leq$$

$$\int_{Z(\mathfrak{N})} |v-v_o|\,d + \int_{Z(h)\setminus Z(\mathfrak{N})} |v-v_o|\,d\mu = \int_{Z(h)} |v-v_o|\,d\mu$$

$$= \int_{Z(f^*-v_o)} |v-v_o|\,d\mu .$$

Damit ist $\mathfrak{N}_{f^*-v_o}$ extremal für v_o, d.h. $v_o \in P[f]$.

Es ist $\|f^*-v_o\| = \int |f^*-v_o|\,d\mu = \int |h|\,d\mu = \int |v_1-v_o|\,d\mu$.

Ferner ist $h+v_o-v_1 = |v_o-v_1|\,\mathrm{sign}(f-v_o)+(v_o-v_1) =$

$$= |v_o-v_1|\left[\mathrm{sign}(f-v_o)-\mathrm{sign}(v_1-v_o)\right] .$$

Dann gilt $\|f^*-v_1\| = \int |h+v_o-v_1|\,d\mu$

$$= \int_{U^+ \cup U^-} |h+v_o-v_1|\,d\mu =$$

$$= \int_{U^+} |v_o-v_1|\,(1-\mathrm{sign}(v_1-v_o))\,d\mu +$$

$$= \int_{U^-} |v_o-v_1|\,\left|-1-\mathrm{sign}(v_1-v_o)\right|\,d\mu = \int_{U^+ \cup U^-} |v_o-v_1|\,d\mu$$

wegen der Eigenschaft (ii). Also gilt $v_1 \in P[f]$. Dies ist ein Widerspruch, da V T-Menge ist.

Θ

Satz 5.3:

Ist V eine α -Sonne, so gilt die Umkehrung von Satz 5.2.

Beweis:

Wir nehmen an, es gibt ein $f \in C[o,1]$ mit zwei verschiedenen besten Approximationen v_o, v_1. Dann gilt nach Lemma

5.1 für alle $t\in[o,1]$

$$(f(t)-v_o(t))(f(t)-v_1(t)) \geq o \quad .$$

Es sei $U^+ := \{ t\in[o,1] : f(t)-v_o(t) > o \text{ oder } f(t)-v_1(t) > o \}$

und $U^- := \{ t\in[o,1] : f(t)-v_o(t) < o \text{ oder } f(t)-v_1(t) < o \}$.

Dann ist $\mathfrak{N} = (U^+, U^-)$ eine L_1-Sigantur. Nach dem Durchschnittssatz (siehe BrosowskiWegmann[197o]) und dem Darstellungssatz für Extremalfunktionale gibt es nun eine meßbare Funktion $g:[o,1]\to\mathbb{R}$ mit $|g(t)|=1$ für alle $t\in[o,1]$ und ferner $g(t)=1$ für alle $t\in U^+$ und $g(t)=-1$ für alle $t\in U^-$ sowie $\int g(v_o-v_1)d\mu = o$. Für alle $t\in Z(\mathfrak{N})$ gilt $f(t)-v_o(t)=f(t)-v_1(t)=o$, also ist $Z(\mathfrak{N})$ in $Z(v_1-v_o)$ enthalten. Dies ist ein Widerspruch, da wir vorausgesetzt haben, daß solches nicht passiert.

B

Diese Ergebnisse wollen wir nun auf den Fall anwenden, daß V Bild einer C^1-Abbildung im Sinn von § 1 ist. Mit dem Theorem 1.3 von Kripke/Rivlin[1965] folgt sofort das

Lemma 5.4:

Für alle $f\in C[o,1]$ gilt

$$F(a)\in T[f] \iff \text{für alle } h\in T^*(a) \text{ gilt } \left| \int h(\operatorname{sign}(f-F(a)))\, d\mu \right| \leq \int_{Z(f-F(a))} |h|\, d\mu .$$

Damit erhalten wir das

Lemma 5.5:

Ist $f\in C[o,1]$ und $F(a)\in P[f]$, $f\neq F(a)$, so gibt es kein $h\in T^*(a)$ mit $\operatorname{sign}(f-F(a))=\operatorname{sign}(h)$ fast überall.

Es wird angenommen,die Behauptung sei falsch.Die Menge $\{ t\in[o,1] : F(a,t)\neq f(t)\}$ hat positives Maß. Nach Lemma 5.4 gilt für alle $h\in T^*(a)$

$$\left|\int h \operatorname{sign}(f-F(a))\, d\mu\right| \leq \int_{Z(f-F(a))} |h|\, d\mu .$$

Sei nun $\hat{h}\in T^*(a)$ mit $\operatorname{sign}(\hat{h})=\operatorname{sign}(f-F(a))$ fast überall. Dann gilt

$$\int|\hat{h}|\,d\mu = \int \hat{h} \operatorname{sign}(f-F(a))\, d\mu \leq \int_{Z(f-F(a))} |\hat{h}|\, d\mu .$$

Also ist $\hat{h}=o$ fast überall auf der Menge $[o,1]\setminus Z(f-F(a))$. Somit ist $\hat{h}=o$ fast überall.Aber die Menge,wo F(a) von f verschieden ist,hat positives Maß,also auch die Menge,wo $\hat{h}$ von ȯ verschieden ist.Dies ist ein Widerspruch. Θ

Wir wollen nun den bekannten Satz von Jackson verallgemeinern auf nichtlineare Probleme.Man vergleiche dazu das Theorem 4.4 von Rice[1,1964].Obwohl die Tschebyschev-Approximation und die L_1-Approximation in $C[o,1]$ sehr ähnlich sind,müssen wir bei dem folgenden Eindeutigkeitssatz zu dem analogen Satz in der Tschebyschev-Approximation eine weitere Voraussetzung machen.In dem anschließenden Beispiel wird dann gezeigt,daß diese Voraussetzung nicht unterdrückt werden kann.

Satz 5.6:

F erfülle die lokale und die globale Haarsche Bedingung; $\mathfrak{F}$ sei α -Sonne.Dann ist $\mathfrak{F}$ T-Menge.

Beweis:

Die Bedingung von Satz 5.3 ist erfüllt.Es sei $v_o\in\mathfrak{F}$

und $\mathcal{U}=(U^+,U^-)$ für v_o extremal. Wir behaupten, daß für jedes $v_1 \in \mathcal{F}$, $v_1 \neq v_o$, nicht $Z(v_1-v_o) \supset Z(\mathcal{U})$ gilt. Dazu nehmen wir an, es gibt ein $v \in \mathcal{F} \setminus \{v_o\}$ mit $Z(v-v_o) \supset Z(\mathcal{U})$. Nun sei a eine Parametrisierung für v_o. Dann hat $v-v_o$ höchstens d(a)-1 Nullstellen. Also enthält $Z(\mathcal{U})$ höchstens d(a)-1 Punkte. Nun sei $f \in C[o,1]$ mit $f(t)-v_o(t)=o$ für alle $t \in Z(\mathcal{U})$ und $\operatorname{sign}(f-v_o)(t)=\varepsilon_{\mathcal{U}}(t)$ für alle t aus $U^+ \cup U^-$. Es ist $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{f-v_o}$, also $v_o \in P[f]$. Nun sei P die Menge alle $t \in Z(\mathcal{U}) \cap (o,1)$, in denen $f-v_o$ das Vorzeichen wechselt. Dies sind höchstens d(a)-1 Punkte. Nach Theorem 5.2 bei Karlin/Studden[1966] gibt es ein $h \in T^*(a)$, welches in den Punkten von P das Vorzeichen wechselt und in allen Punkten von $(o,1) \setminus P$ von o verschiedenist. Dann gilt aber $\operatorname{sign}(h)=\operatorname{sign}(f-v_o)$ fast überall (eventuell muß man von h zu -h übergehen). Widerspruch.

θ

Bislang gibt es keine hinreichenden Bedingungen außer diesem Satz für nichtlineare Probleme. Bislang kann aber auch kein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes gegeben werden, denn immer noch ist es ungelöst, welche α-Sonnen in diesem Raum nicht konvex sind.

Das Ergebnis von Jackson wurde von Ptak[1958] und Singer[196o] für lineare Probleme geringfügig verallgemeinert. Vermutlich reichen die dort gemachten Voraussetzungen auch für den nichtlinearen Fall aus.

Im folgenden Beispiel zeigen wir, daß das Erfülltsein

der lokalen und globalen Haarschen Bedingung noch nicht impliziert,daß $\mathcal{F}$ eine α -Sonne ist.

Beispiel 5.1

Sei $M=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(-1,1)$.Die Abbildung $F:M\to C[-1,1]$ sei durch

$$F(a,b,c,t)=\frac{a+bt}{1+ct}$$

definiert.Dann ist $\mathcal{F}$ nach Theorem2 von Dunham[1,1971] proximinal.Ferner erfüllt F die globale und lokale Haarsche Bedingung nach Meinardus/Schwedt[1964].

Wir zeigen mit einer Idee von Brosowski[3,1969] folgende Implikation:Ist $\mathcal{F}$ eine α -Sonne,so ist $\mathcal{F}$ konvex.

Sei $f\in C[-1,1]\setminus\mathcal{F}$ und v_o eine beste Approximation an f.

Sei $A=\{t\in[-1,1] : f(t)=v_o(t)\}$.

Fall 1: $\mu(A)=0$.

Da $\mathcal{F}$ α -Sonne ist,gilt für alle $v\in\mathcal{F}$

$$\inf\{x'(v-v_o) : x'\in\mathcal{E}_{f-v_o}\}\leq 0 \quad .$$

Wegen des Darstellungsatzes für Extremalfunktionale gibt es eine meßbare Funktion $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ mit $g(t)=1$ für alle t mit $f(t)-v_o(t)>0$ und $g(t)=-1$ für alle t mit $f(t)-v_o(t)<0$.Dann gilt also $\int g(v-v_o)d\mu\leq 0$ für alle $v\in\mathcal{F}$ .Dann gilt auch für alle $v\in\operatorname{con}\mathcal{F}$ $\int g(v-v_o)d\mu\leq 0$.Nun ist aber $0<\|f-v_o\|=\int g(f-v_o)d\mu$.

Also gilt $f\notin\operatorname{con}\mathcal{F}$ .Dann muß $\mathcal{F}$ konvex sein.

Fall 2: $\mu(A)>0$.

Wäre $f\in\operatorname{con}\mathcal{F}$,so wäre f analytisch,also $f=v_o$ mit Widerspruch.Also $f\notin\operatorname{con}\mathcal{F}$ .Dann muß $\mathcal{F}$ konvex sein.

Die Überlegungen,die hier in Satz 5.2 und Satz 5.3 durchgeführt haben,sind äquivalent zu den Ergebnissen von Henze[197o].Wir haben hier die T-Mengen durch Aussagen über extremale L_1-Signaturen charakterisiert.Bei Henze werden die T-Mengen durch Aussagen über Nullstellenmengen gewisser Funktionen charakterisiert.Diese Aussagen entsprechen sich.Wir haben hier den Begriff der L_1-Signatur gewählt,um die Verwandtschaft mit den Ergebnissen von Brosowski[3,1968] hervorzuheben.
Extremale L_1-Siganturen werden auch bei Arold[1968] betrachtet;dort nicht unter dieser Definition,sie heißen dort β-Mengen.Der Begriff wurde jedoch dort zu eng gefaßt,so daß keine vollständige Analogie zur Tschebyschev-Approximation auftrat.Wir wir hier gesehen haben,genügt eine geringfügige Modifikation dieses Konzeptes,um die gewünschte Analogie zu erhalten.

L I T E R A T U R

I.Arold,Charakterisierung von Minimallösungen in der L_1-Norm,Zulassungsarbeit Universität München,1968

R.B.Barrar/H.L.Loeb

(1) Best nonlinear approximation with interpolation, Arch.Rat.Mech.Anal.33(1969)

(2) On the continuity of the nonlinear Tchebycheff operator,Pac.J.Math.32(197o)

N.Bourbaki,Variétés différentielles et analytiques,Hermann,Paris,1967

B.Brosowski

(1) Über Tschebyscheffsche Approximationen mit linearen Nebenbedingungen,Math.Z.88(1965)

(2) Über die Eindeutigkeit der asymptotisch-konvexen Tschebyscheff-Approximation,ISNM 7(1967)

(3) Nichtlineare Tschebyscheff-Approximation,BI-Verlag,1968

(4) Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen,ISNM 1o(1969)

(5) Über die Eindeutigkeit der rationalen Tschebyscheff Approximationen,Num.Math.7(1965)

B.Brosowski/R.Wegmann,Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen,J.Approx.Th.3 (197o)

E.W.Cheney/D.E.Wulbert,The existence and unicity of best approximations,Math.Scand.24(1969)

L.Collatz/W.Krabs,Approximationstheorie,Teubner,Stuttgart, 1973

F.R.Deutsch,On uniform approximation with interpolatory constraints,J.Math.Anal.Appl.24(1968)

R.L.Dolganov,Tschebyschev-Approximation mit asymptotisch-konvexen Funktionenfamilien,Isv.Vyss.Uc.Zav.Mat. 7,122(1972) russisch

J.Dugundij,Topology,Allyn and Bacon,London,1968

C.B.Dunham

(1) Existence of best mean rational approximations, J.Approx.Th.4(1971)

(2) Chebyshev-approximation by a+blog(1+cx),J.Inst. Math.Appl.8(1971)

(3) Chebyshev-approximation by exponential ratios, J.Inst.Math.Appl.11(1973)

(4) Chebyshev-approximation by a+bφ(cx),Comp.13(1974)

C.Gilormini

(1) Approximation rationnelle avec des nœuds,C.R.Acad. Sc.Paris,A 263(1966)

(2) Continuité de l'approximation rationnelle de Tchebycheff avec des nœuds,C.R.Acad.Sc.Paris,A 264(1967)

(3) Approximation par fractions rationnelles généralisées dont les coefficients vérifient des relations linéaires,C.R.Acad.Sc.Paris A 264(1967)

G.A.Gislason/H.L.Loeb,Nonlinear Tchebycheff approximation with constraints,J.Approx.Th.6(1972)

H.Grauert/W.Fischer,Differntial-und Intergralrechnung II, Springer,Berlin,1968

D.Henze,Über Eindeutigkeitsfragen bei nichtlinearer L_1- und Tschebyscheff-Approximation,Comp.6(197o)

K.H.Hoffmann,Zur Theorie der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation mit Nebenbedingungen,Num.Math.14(1969)

W.Hurewicz/H.Wallann,Dimension Theory,Princeton University Press,1948

W.Krabs

(1) Über differenzierbare asymptotisch-konvexe Funktionenfamilien bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation,Arch.Rat.Mech.Anal.27(1967)

(2) Über die Reichweite des lokalen Kolmogoroff-Kriteriums bei der nichtlinearen gleichmäßigen Approximation,J.Approx.Th.2(1969)

(3) Charakterisierung der Eindeutigkeit bei der nichtlinearen gleicjmäßigen Approximation,Arch.Rat.Mech. Anal.36(197o)

B.R.Kripke/T.J.Rivlin,Approximation in the metric of $L_1(X,\mu)$, Trans.AMS 119(1965)

H.L.Ling/J.E.Tornga,The constant error curve problem for varisolvent functions,J.Approx.Th.11(1974)

J.C.Mairhuber,On Haar's Theorem concerning Tchebychev-approximation problems having unique solutions, Proc.AMS 7(1956)

G.Meinardus/D.Schwedt,Nichtlineare Approximation,Arch.Rat. Mech.Anal.17(1964)

S.Paszkowski,Sur l'approximation uniforme avec des noeuds, Ann.Plolon.Math.2(1955)

V.Ptak,On approximation of vontinous functions in the metric $\int_a^b |x(t)|\,dt$,Czech.Math.J.8(1958)

T.J.Rivlin/H.S.Shapiro,A unified approach to certain problems of approximation and minimization,J.SIAM 9 (1961)

J.R.Rice,The approximation of functions,Addison-Wesley, London

(1) Vol. 1 1964

(2) Vol. 2 1969

I.Singer,On a theorem of V.Ptak concerning best approximation of continous functions in the metric $\int_a^b |x(t)|\,dt$,Czech.Math.J.1o(196o)

D.E.Wulbert,Nonlinear approximation with tangential characterization,Am.J.Math.93(1971)

S.Karlin/W.Studden,Tchebycheff systems,Interscience Publ New York,1966

Lebenslauf

Ich wurde am 16.5.1949 in Stuttgart als erstes Kind des kaufmännischen Angestellten Eberhard Warth und seiner Ehefrau Ruth,geb.Beyrich geboren.

Von 1956 bis 1960 besuchte ich in Stuttgart-Untertürkheim die Grundschule,anschließend dort das Wirtemberg-Gymnasium.Dort legte ich 1968 die Reifeprüfung ab.

Im Oktober 1968 begann ich in Göttingen das Studium der Mathematik;als Nebenfach wählte ich Volkswirschaftslehre.Im Oktober 1972 bestand ich das Diplomexamen.Das Thema meiner Diplomarbeit war:"Approximation differenzierbarer Funktionen mehrerer Veränderlicher".

Seit Dezember 1972 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an den Lehrstühlen für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen tätig.

Mein Studium wurde besonders durch meinen Lehrer Prof.Dr.B.Brosowski geprägt.Unter seiner Anleitung fertigte ich meine Diplomarbeit an und ihm danke ich für die Diskussionen und Anregungen zu dieser Arbeit.